2013年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中$k,c$为常数,且$c\neq 0$,则(　　)

(A)$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B)$k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C)$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D)$k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)曲面$x^2+\cos(xy)+yz+x=0$在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为(　　)

(A)$x-y+z=-2$.　　(B)$x+y+z=0$.

(C)$x-2y+z=-3$.　　(D)$x-y-z=0$.

(3)设$f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$,$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$,则$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$(　　)

(A)$\dfrac{3}{4}$.　　(B)$\dfrac{1}{4}$.　　(C)$-\dfrac{1}{4}$.　　(D)$-\dfrac{3}{4}$.

(4)设$L_1:x^2+y^2=1$,$L_2:x^2+y^2=2$,$L_3:x^2+2y^2=2$,$L_4:2x^2+y^2=2$为四条逆时针方向的平面曲线.记$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\,(i=1,2,3,4)$,则$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$(　　)

(A)I_1.　　(B)I_2.　　(C)I_3.　　(D)I_4.

(5)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均为$n$阶矩阵,若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且$\boldsymbol{B}$可逆,则(　　)

(A)矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组等价.

(B)矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组等价.

(C)矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的行向量组等价.

(D)矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组等价.

(6)矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为(　　)

(A)$a=0,b=2$.　　(B)$a=0$,b为任意常数.

(C)$a=2,b=0$.　　(D)$a=2$,b为任意常数.

(7)设X_1,X_2,X_3是随机变量,且$X_1\sim N(0,1)$,$X_2\sim N(0,2^2)$,$X_3\sim N(5,3^2)$,$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}$$(i=1,2,3)$,则(　　)

(A)$p_1>p_2>p_3$.　　(B)$p_2>p_1>p_3$.

(C)$p_3>p_1>p_2$.　　(D)$p_1>p_3>p_2$.

(8)设随机变量$X\sim t(n)$,$Y\sim F(1,n)$,给定$\alpha(0<\alpha<0.5)$,常数c满足$P\{X>c\}=\alpha$,则$P\{Y>c^2\}=$(　　)

(A)α.　　(B)$1-\alpha$.　　(C)2α.　　(D)$1-2\alpha$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$______.

(10)已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,则该方程的通解为 $y=$______.

(11)设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$($t$ 为参数),则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$______.

(13)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

(14)设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布,a 为常数且大于零,则 $P\{Y\leqslant a+1 \mid Y>a\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

(16)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0 (n\geqslant 2)$,$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明 $S''(x)-S(x)=0$;

(Ⅱ)求 $S(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数,且$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在$\eta\in(-1,1)$,使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

设直线L过$A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$两点,将L绕z轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面$z=0$,$z=2$所围成的立体为Ω.

(Ⅰ)求曲面Σ的方程;

(Ⅱ)求Ω的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当$a,b$为何值时,存在矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵$\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ)求 Y 的分布函数;

(Ⅱ)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2013年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) D

解　用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=c\neq 0,$$

因此 $k-1=2,\dfrac{1}{k}=c$，即 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.故应选 D.

(2) A

解　$F'_x=2x-y\sin(xy)+1$，　$F'_y=-x\sin(xy)+z$，　$F'_z=y$.

曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$，切平面方程为：

$$1\cdot(x-0)-(y-1)+1\cdot(z+1)=0,$$

即 $x-y+z=-2$.故应选 A.

(3) C

解　观察到 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的正弦函数，对 f 进行奇延拓，其周期为 2.

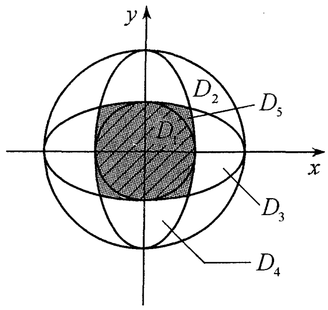
故 $S(x)=f(x)$.

$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$.故应选 C.

(4) D

解　由格林公式得

$$I_i=\oint_{\Delta_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



其中　$D_1:x^2+y^2\leqslant 1$,

$D_2:x^2+y^2\leqslant 2$,

$D_3:\dfrac{x^2}{2}+y^2\leqslant 1$,

$D_4:x^2+\dfrac{y^2}{2}\leqslant 1$.

显然在 D_4 内有

$1-x^2-\dfrac{y^2}{2}>0$，在 D_4 外有 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}<0$，

又如图有 $D_1\subset D_4,D_4\subset D_2$.由重积分性质知 $I_4>I_1,I_4>I_2$.

又 $D_4=D_5+D_4\backslash D_5,D_3=D_5+D_3\backslash D_5$，在 $D_3\backslash D_5$ 上 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}<0$，在 $D_4\backslash D_5$ 上 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}>0$，

故 $I_4=\iint\limits_{D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4\setminus D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$>I_3=\iint\limits_{D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3\setminus D_5}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.故应选 D.

(5) B

解　由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,那么对矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 按列分块,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即 $$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\gamma}_n=\mathrm{b}_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.
又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出.
由向量组等价的定义可知,应选 B.

(6) B

解　记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$,考察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$ 的条件.

首先,显然 $|\boldsymbol{A}|=0$,因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.
其次,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2+b$,因此如果 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 b 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值.于是“充要条件”为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 1 \end{vmatrix}=-4a^2=0\Rightarrow a=0.$$

因此充要条件为 $a=0$,b 为任意实数,故应选 B.

(7) A

解　将随机变量 X_2 和 X_3 化成标准正态后再比较其大小.

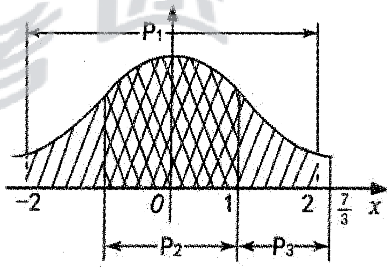
$p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)$,

$p_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\left\{\frac{-2}{2}\leqslant\frac{X_2}{2}\leqslant\frac{2}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$,

$p_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant 2\}$

$=P\left\{\frac{-2-5}{3}\leqslant\frac{X_3-5}{3}\leqslant\frac{2-5}{2}\right\}$

$=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1)$,



由右图正态分布曲线下的面积所代表的概率可知
$p_1>p_2>p_3$.　故应选 A.

(8) C

解 当 $X \sim t(n)$ 时，$X^2 \sim F(1,n)$，又 $Y \sim F(1,n)$，故 Y 与 X^2 同分布.

当 $c>0$ 时，由 t 分布的对称性有

$P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{|X|>c\}=P\{X>c \cup X<-c\}=2P\{X>c\}=2\alpha$.

故应选 C.

二、填空题

(9) 1

解 把 $x=0$ 代入方程有 $f(0)=1$.方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端同时对 x 求导有

$f'(x)-1=e^{x[1-f(x)]}[1-f(x)-xf'(x)]$.

把 $x=0$ 代入上式得 $f'(0)=2-f(0)=1$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1.$$

(10) $C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$

解 由常系数非齐次线性微分方程解的性质可得

$$y_1-y_3=e^{3x}, \quad y_2-y_3=e^x$$

是相应二阶齐次线性微分方程的两个特解.

故相应二阶齐次线性微分方程的通解为

$$y_0=C_1e^{3x}+C_2e^x.$$

所以所求非齐次方程的通解可表示为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}.$$

(11) $\sqrt{2}$

解 $\because \dfrac{dx}{dt}=\cos t, \quad \dfrac{dy}{dt}=t\cos t$，

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},$$

从而 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

(12) $\ln 2$

解 $$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x}=0+\left.\ln\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

(13) -1

解 题设条件“$a_{ij}+A_{ij}=0$”即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}^*$，于是 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^2$，可见 $|\boldsymbol{A}|$ 只可能是 0 或 -1.

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(-\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^*)$，则 $r(\boldsymbol{A})$ 只可能为 3 或 0.

而 A 为非零矩阵，因此 $r(\boldsymbol{A})$ 不能为 0，从而 $r(\boldsymbol{A})=3$，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}|=-1$.

或，用特例法.取一个行列式为 -1 的正交矩阵满足 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}^*$.

故应填 -1.

(14) $1-\frac{1}{\mathrm{e}}$

解 由于 $X\sim E(1)$，$a>0$，则由指数分布的分布函数有

$$P\{Y\leqslant a+1 \mid Y>a\}=\frac{P\{Y>a,Y\leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}=\frac{P\{a<Y\leqslant a+1\}}{1-P\{Y\leqslant a\}}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-(a+1)}-(1-\mathrm{e}^{-a})}{1-(1-\mathrm{e}^{-a})}=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-a-1}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

三、解答题

(15) **解** 由条件显然有

$$f(1)=0,\quad f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

由分部积分法及换元积分法有

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}\\
&=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\
&=-4\int_0^1\ln(x+1)\mathrm{d}\sqrt{x}\\
&=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{令 } t=\sqrt{x}}-4\ln 2+8\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=-4\ln 2+8\left[\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right]\\
&=-4\ln 2+8-8\arctan t\Big|_0^1\\
&=-4\ln 2+8-2\pi.
\end{aligned}$$

(16) (Ⅰ) **证** $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$， $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，

又 $\because a_{n-2}=n(n-1)a_n\ (n\geqslant 2)$，

$\therefore S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，

$\therefore S''(x)-S(x)=0$ 得证.

(Ⅱ)**解** $S''(x)-S(x)=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程,其特征方程为

$$\lambda^2-1=0,$$

从而 $\lambda=\pm1$,于是 $S(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$.

又 $S(0)=a_0=3, S'(0)=a_1=1$,

代入上式得 $\begin{cases}C_1+C_2=3\\ -C_1+C_2=1\end{cases}$,

解得 $C_1=1, C_2=2$,

所以 $S(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{x}$.

(17)**解** 先求驻点,令

$$\begin{cases}f_x=\left(x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0\\ f_y=\left(1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$

为了判断这两个驻点是否为极值点,求二阶导数

$$\begin{cases}f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f_{xy}=\left(x^2+1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f_{yy}=\left(2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\end{cases}$$

在点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 处,

$$A=f_{xx}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},$$

$$B=f_{xy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},$$

因为 $A<0, AC-B^2<0$,所以 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

类似地,在点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处,

$$A=f_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$

$$B=f_{xy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$$

因为 $A>0, AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0$，所以 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为

$f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}}=-e^{-\frac{1}{3}}$.

(18) **证** （Ⅰ）设 $F(x)=f(x)-x,\ x\in[-1,1]$.

$\because$ $f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ $f(0)=0$.

从而 $F(1)=f(1)-1=0$,

$F(0)=f(0)-0=0$,

且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)-1=0$. 即 $f'(\xi)=1$.

（Ⅱ）设 $G(x)=f'(x)+f(x)-x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数，

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数，

$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1)$,

$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(-1)=f'(1)$.

故 $G(1)=G(-1)$，且 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 内连续，在 $(-1,1)$ 内可导.由罗尔中值定理，$\exists\,\eta\in(-1,1)$ 使得

$$G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0.$$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

另解 1： 设 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$，则由(1)：$G(\xi)=0$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$.

则 $\exists\,\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使 $G'(\eta)=0$,

即 $e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$.

亦即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

另解 2： 令 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$，则 $G(\xi)=0$.

由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，得 $G(-\xi)=0$.

$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]\subset[-1,1]$ 上可导，由罗尔定理知

$\exists\,\eta\in(-\xi,\xi)\in(-1,1)$, $G'(\eta)=0$,

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19) **解** （Ⅰ）$\overline{AB}=\{-1,1,1\}$

$$L:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$，对应于 L 上的点 $M_0(x_0,y_0,z)$，则 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,

由 $\begin{cases}x_0=1-z\\ y_0=z\end{cases}$

得 $\Sigma: x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$

即 $\Sigma: x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

（Ⅱ）显然 $\bar{x}=0, \bar{y}=0, \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$,

记 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)=\frac{10}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z=\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{14}{3}\pi,$$

$\therefore\ \bar{z}=\dfrac{7}{5}$,

$\therefore$ 形心坐标 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

(20) **解** 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 成立的充分必要条件为

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\ -ax_1+x_2+ax_4=1,\\ x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2-ax_3=b.\end{cases}\qquad (*)$$

对方程组的增广矩阵施以初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right).$$

当 $a\neq -1$ 或 $b\neq 0$ 时,方程组(*)无解.

当 $a=-1,b=0$ 时,方程组(*)有解,通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

综上,当且仅当 $a=-1,b=0$ 时,存在满足条件的矩阵 $\boldsymbol{C}$,且

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix},k_1,k_2\text{ 为任意常数}.$$

(21) **证** (Ⅰ) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]\\&=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

又 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵,所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

于是 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，又

$$r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2,$$

所以 $\lambda_3=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22) **解** （Ⅰ）由题设条件知，$P\{1\leqslant Y\leqslant 2\}=1$

记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$，

当 $1\leqslant y<2$ 时，
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leqslant y\}\\&=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x\\&=\frac{y^3+18}{27}.\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

（Ⅱ）$P\{X\leqslant Y\}=P\{X<2\}=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

(23) **解** （Ⅰ）$EX=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时，$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^n\ln x_i$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0$，得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{x_i}}$.

所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{X_i}}$.