

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 3阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

(10) 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为_____.

(11) 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ _____.

(12) 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时,对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为_____.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加,则当 $l = 12 \text{ cm}$, $w = 5 \text{ cm}$ 时,它的对角线增加的速率为_____.

(14) 设 A, B 为3阶矩阵,且 $|A| = 3$, $|B| = 2$, $|A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分10分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(16) (本题满分10分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小,说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

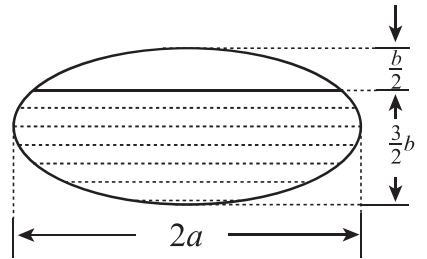
(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数, 且

$\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

(18) (本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m , 质量单位为 kg , 油的密度为常量 ρ , 单位为 kg/m^3).



(19) (本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

(20) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

(21) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$.

证明: 存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得: $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解.

(23) (本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 \mathbf{Q} 使 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ 为对角矩阵, 若 \mathbf{Q} 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求

a, \mathbf{Q} .

2010 年真题参考答案

一、选择题

(1)B. (2)A. (3)C. (4)D. (5)B. (6)D. (7)A. (8)D.

二、填空题

(9) $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(10) $y = 2x$. (11) $-2^n(n-1)!$. (12) $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$. (13) 3cm/s . (14) 3 .

三、解答题

(15) 单调增加区间: $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$. 单调减少区间: $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$.

极大值 $f(0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, 极小值 $f(\pm 1) = 0$.

(16) (I) $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt (n = 1, 2, \dots)$.

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(17) $\psi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 (t > -1)$.

(18) $abpl\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(19) $\begin{cases} a = -2, \\ b = -\frac{2}{5}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -\frac{2}{5}, \\ b = -2. \end{cases}$

(20) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$.

(21) 证明略.

(22) (I) $\lambda = -1, a = -2$.

(II) $k(1, 0, 1)^T + \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$ 为 $Ax = b$ 的通解, 其中 k 为任意常数.

(23) $a = -1, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, Q^T A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.