2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则(　　)

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切,则 $a=$ (　　)

(A) 4e.　　(B) 3e.　　(C) 2e.　　(D) e.

(4) 设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性(　　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m, n 的取值都有关.　　(D) 与 m, n 的取值都无关.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (　　)

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　(D) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

(7) 设向量组 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是(　　)

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.　　(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.　　(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ ______.

(10) 曲线 $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为______.

(11) 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ ______.

(12) 当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时,对数螺线 $r = e^{\theta}$ 的弧长为______.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加,则当 $l = 12$ cm,$w = 5$ cm 时,它的对角线增加的速率为______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = 3$, $|\boldsymbol{B}| = 2$, $|\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}| = 2$,则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}| =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n = 1, 2, \cdots)$ 的大小,说明理由;

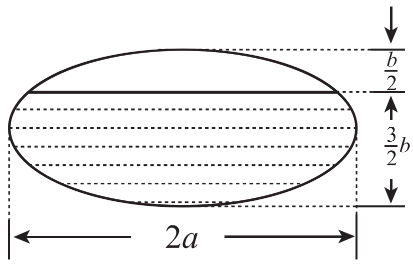
(Ⅱ)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt (n = 1, 2, \cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(17)(本题满分 11 分)

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定,其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数,且 $\psi(1) = \dfrac{5}{2}$,$\psi'(1) = 6$,已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$,求函数 $\psi(t)$.

(18)(本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐,底面是长轴为 $2a$,短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放,当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时(如图),计算油的质量.(长度单位为 m,质量单位为 kg,油的密度为常量 ρ,单位为 kg/m^3).



(19)(本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 确定 a, b 的值,使等式在变换 $\xi = x + ay$, $\eta = x + by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta}\, dr d\theta$, 其中 $D = \left\{ (r, \theta) \middle| 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \right\}$.

(21)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得：$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ, a;

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $a, \boldsymbol{Q}$.

2010 年真题参考答案

一、选择题

(1)B.　(2)A.　(3)C.　(4)D.　(5)B.　(6)D.　(7)A.　(8)D.

二、填空题

(9)$C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$,其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

(10)$y=2x$.　(11)$-2^n(n-1)!$.　(12)$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.　(13)3cm/s.　(14)3.

三、解答题

(15) 单调增加区间:$(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$. 单调减少区间:$(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$.

极大值 $f(0)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$,极小值 $f(\pm1)=0$.

(16) (Ⅰ) $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(17) $\psi(t)=t^3+\dfrac{3}{2}t^2\ (t>-1)$.

(18) $ab\rho l\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(19) $\begin{cases}a=-2,\\ b=-\dfrac{2}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5},\\ b=-2.\end{cases}$

(20) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}$.

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) $\lambda=-1,\ a=-2$.

(Ⅱ) $k(1,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解,其中 k 为任意常数.

(23) $a=-1,\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.