2020 年数三真题

一、选择题

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$(　　)

(A)$b\sin a$.　　(B)$b\cos a$.　　(C)$b\sin f(a)$.　　(D)$b\cos f(a)$.

(2) 函数 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 (　　)

(A)1 个.　　(B)2 个.　　(C)3 个.　　(D)4 个.

(3) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则 (　　)

(A)$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　(B)$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

(C)$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.　　(D)$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

(4) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 (　　)

(A)$(-2,6)$.　　(B)$(-3,1)$.　　(C)$(-5,3)$.　　(D)$(-17,15)$.

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 (　　)

(A)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(B)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(C)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(D)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 (　　)

(A)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　(B)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(7) 设 A，B，C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A，B，C 中恰有一个事件发生的概率为 (　　)

(A)$\frac{3}{4}$.　　(B)$\frac{2}{3}$.　　(C)$\frac{1}{2}$.　　(D)$\frac{5}{12}$.

(8) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 (　　)

(A)$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.　　(B)$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

考途
考路艰辛，征途有我

二、填空题

(9) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$ _____.

(10) 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在 $(0,-1)$ 处的切线方程为_____.

(11) 设某厂家某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，设产品的单价为 P，需求量 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为_____.

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\le y\le\frac{1}{1+x^2},0\le x\le 1\right.\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为_____.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots$，$Y$ 表示 X 被 3 除的余数，则 $E(Y)=$ _____.

三、解答题

(15) 已知 a，b 为常数，若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to+\infty$ 时是等价无穷小，求 a，b.

(16) 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(17) 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$，$f(0)=1$，$f'(0)=-1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式.

(II) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(18) 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\}$，连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$. 证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,2)$，使 $|f'(\xi)|\ge M$.

(II) 若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(\xi)|\le M$，则 $M=0$.

(20) 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

(I) 求 a，b 的值.

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(I) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(II) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\le 0.\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\le 0.\end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布.

考途
考路艰辛，征途有我

(II) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

(23) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ，m 为参数且均大于零.

(I) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0$，$t>0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 t_1，t_2，$\cdots$，t_n，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

考途
考路艰辛，征途有我

2020年考研数三真题解析

一、选择题

(1)【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\xi\cdot[f(x)-a]}{x-a}$（$\xi$ 在 $f(x)$ 和 a 之间）（拉格朗日定理）

$$=\cos a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}$$

$$=b\cos a$$

故应选(B).

(2)【答案】 C

【解析】 由 $f(x)$ 的表达式可知，$f(x)$ 共有四个间断点，分别为

$x=-1$：$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$，则 $x=-1$ 为第二类间断点；

$x=0$：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2e}$，$x=0$ 为可去间断点；

$x=1$：$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\infty$，则 $x=1$ 为第二类间断点；

$x=2$：$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，则 $x=2$ 为第二类间断点.

故应选(C).

(3)【答案】 A

【解析】 由于 $f(t)$ 可导且为奇函数，则 $f'(t)$，$\cos f(t)$ 都是偶函数，从而 $f'(t)+\cos f(t)$ 是偶函数，则 $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数，故应选(A).

(4)【答案】 B

【解析】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{6-(-2)}{2}=4$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^{2n-2}$ 的收敛半径为 $\sqrt{4}=2$.

有 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}\right)'=2(x+1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^{2n-2}$ 的收敛半径为 2，进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛半径为 2. 所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 $(-3,1)$. 答案为(B).

(5)【答案】 C

【解析】 选择题的 4 个选项，已经告诉你 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个列向量所构成. 因此只要判断 $\boldsymbol{A}$ 的哪 3 个列向量是线性无关的. 而条件就是 $A_{12}\neq 0$.

因

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0$$

意味 $(a_{21},a_{31},a_{41})^{\mathrm{T}}$，$(a_{23},a_{33},a_{43})^{\mathrm{T}}$，$(a_{24},a_{34},a_{44})^{\mathrm{T}}$ 线性无关，那么必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关（低维线性无关向量增加坐标而得到的高维向量必线性无关）. 故应选(C).

考途
考路艰辛，征途有我

【评注】 如果是解答题，你应当如何处理？

(6)【答案】 D

【解析】 本题考查 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的基本知识. $\boldsymbol{P}$— 特征向量，$\boldsymbol{\Lambda}$— 特征值. 且 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的位置对应要正确.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量.

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，排除(A)，(C)，又对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量应当是 $\lambda=1,\lambda=-1,\lambda=1$ 的顺序，排除(B).

(D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量，$-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量，故应选(D).

(7)【答案】 D

【解析】 A,B,C 中恰有一个事件发生即$(A\cup B\cup C)-(AB\cup BC\cup AC)$. 因为 $P(AB)=0$，故 $P(ABC)=0$，所以恰有一个事件发生可以只考虑$(A\cup B\cup C)-(BC\cup AC)$ 的概率

$$P((A\cup B\cup C)-(BC\cup AC))=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AC)-P(BC)-P(AC)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

答案选(D).

(8)【答案】 C

【解析】 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$，则 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,4)$.

$\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho=-\frac{1}{2},\sqrt{DX}=1,\sqrt{DY}=2$，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$.

$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4-2=3$,

$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4+2=7$,

所以(A)$D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\right]=\frac{3}{5}$，(B)$D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\right]=\frac{7}{5}$,

(C)$D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=1$，(D)$D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)\right]=\frac{7}{3}$.

答案选(C).

二、填空题

(9)【答案】 $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解析】 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left.\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left.\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=-1$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

【评注】 也可利用全微分形式不变性求 $\mathrm{d}z$.

(10)【答案】 $y=x-1$

【解析】 等式 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 两端对 x 求导得

$$1+y'+\mathrm{e}^{2xy}2(y+xy')=0$$

考途
考路艰辛，征途有我

将 $x=0, y=-1$ 代入上式得 $y'(0)=1$，故切线方程为 $y=x-1$.

(11)【答案】 8

【解析】 由 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$，可得 $P=\frac{800}{Q+2}-3$.

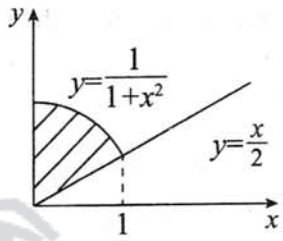
利润函数 $L(Q)=PQ-C(Q)=\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q)$

$$=-\frac{1600}{Q+2}-16Q+700$$

$L'(Q)=\frac{1600}{(Q+2)^2}-16=0$

解得 $Q=8$，$L''(Q)=\frac{-3200}{(Q+2)^3}$，$L''(8)<0$，当 $Q=8$ 时，$L(Q)$ 最大.

(12)【答案】 $\pi\ln 2-\frac{\pi}{3}$



【解析】 $V=2\pi\iint\limits_D r(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\pi\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}}x\,\mathrm{d}y$

$$=2\pi\int_0^1\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1$$

$$=\pi\ln 2-\frac{\pi}{3}$$

(13)【答案】 $a^2(a^2-4)$

【解析】 由行列式性质恒等变形，例如把 2 行加到 1 行，3 行加到 4 行，再把 1 列的 -1 倍加到 2 列，4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$$

【评注】 基本计算题，解法非常多，也可每列都加到第 1 列，再消 0，…

(14)【答案】 $\frac{8}{7}$

【解析】

X	1	2	3	4	5	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	…	…
Y	1	2	0	1	2	0

$P\{Y=1\}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1}{8^n}=\frac{4}{7}$，

$P\{Y=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$，

$P\{Y=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$.

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$EY=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}.$$

考途
考路艰辛，征途有我

三、解答题

(15)【解】（方法一） $e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e=e[e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1]$

$$\sim e\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=en\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]$$

$$\sim en\left(-\frac{1}{2n^2}\right)=-\frac{e}{2n}$$

由题设知 $-\frac{e}{2n}\sim\frac{b}{n^a}$，则 $a=1,b=-\frac{e}{2}$.

（方法二） $e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e=e^{\xi}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$ （ξ 在 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 和 1 之间）（拉格朗日中值定理）

$$\sim e\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=en\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]$$

$$\sim en\left(-\frac{1}{2n^2}\right)=-\frac{e}{2n}$$

则 $a=1,b=-\frac{e}{2}$.

(16)【解】 由 $\begin{cases}f'_x=3x^2-y=0\\f'_y=24y^2-x=0\end{cases}$ 得驻点为 $(0,0),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$.

可计算 $A=f''_{xx}=6x,B=f''_{xy}=-1,C=f''_{yy}=48y$

判别式 $\Delta=AC-B^2=288xy-1$.

在 $(0,0)$ 点处，$\Delta=-1<0$，不是极值点；

在 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 点处，$\Delta=3>0$ 且 $A=1>0$，取极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

(17)【解】（Ⅰ）特征方程 $\lambda^2+2\lambda+5=0$，得 $\lambda_{1,2}=-1\pm2i$，

则 $f(x)=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}$.

由 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 得 $C_1=1,C_2=0$.

有 $f(x)=e^{-x}\cos 2x$.

（Ⅱ）$\int f(x)dx=\int e^{-x}\cos 2xdx=-\int\cos 2xde^{-x}=-e^{-x}\cos 2x+\int e^{-x}(-2\sin 2x)dx$

$$=-e^{x}\cos 2x+2\int\sin 2xde^{-x}=-e^{x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2xdx$$

所以 $\int e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)e^{-x}+C$

有 $a_n=\frac{1}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)e^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}e^{-n\pi}$

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{e^{\pi}-1}$.

(18)【解】 令 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$.

两边求二重积分

$$A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}dxdy+A\iint\limits_D xdxdy$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}dxdy=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy$$

考途
考路艰辛，征途有我

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{3}{16}\pi$$

得 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{16}\pi x$.

$$\text{有}\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{3}{16}\pi\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{16}\pi\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{16}\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3}{64}\pi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{128}\pi^2$$

(19)**【证明】** (Ⅰ)设 $|f(c)|=M$.

若 $c\in(0,1]$,由拉格朗日定理知存在 $\xi\in(0,c)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}$$

从而有 $|f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{c}=\frac{M}{c}\geqslant M$.

若 $c\in(1,2]$,同理存在 $\xi\in(1,2)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-f(c)}{2-c}$$

从而有 $|f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{2-c}=\frac{M}{2-c}\geqslant M$.

综上所述,存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(Ⅱ)若 $c\in[0,1)$,则

$$M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=|f'(\xi)|c\leqslant Mc$$

由于 $0\leqslant c<1$,则 $M=0$.

同理,当 $c\in(1,2]$ 时,也可得 $M=0$.

若 $c=1$,且 $M>0$

$$M=|f(1)|=\left|\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x<M$$

矛盾,则 $M=0$. 原题得证.

(20)**【解】** (Ⅰ)二次型 f 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为二次型 g. 记二次型 f,g 的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{bmatrix}$$

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,于是 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$, $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,即 $\begin{cases}a+b=5,\\ ab=4.\end{cases}$

又因 $a\geqslant b$,故 $a=4,b=1$.

(Ⅱ)对二次型 $f=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 和 $g=4y_1^2+4y_1y_2+y_2^2$,

只要令 $\begin{cases}x_1=y_2,\\ x_2=-y_1,\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 是正交矩阵合于所求.

考途
考路艰辛，征途有我

【评注】 如求出 A 的特征向量并单位化构造正交矩阵 $Q_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，

经 $x=Q_1z$ 得 $x^{\mathrm{T}}Ax=5z_1^2$.

类似构造正交矩阵 Q_2 使 $y^{\mathrm{T}}By=5z_1^2$，即 $x=Q_1z, y=Q_2z$ 有 $z=Q_2^{-1}y$，

从而 $x=Q_1Q_2^{-1}y$ 而得 $Q=Q_1Q_2^{-1}$ 亦可.

(21)【解】 (Ⅰ) 因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 A 的特征向量. 于是 $A\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $A\boldsymbol{\alpha}$ 不共线，即 $\boldsymbol{\alpha}$，$A\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，故 $P=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})$ 可逆.

或(反证法) 若 P 不可逆，有

$$|P|=|\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha}|=0$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $A\boldsymbol{\alpha}$ 成比例，于是 $A\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$. 又 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的特征向量与已知条件矛盾.

(Ⅱ)(方法一) 由 $A^2\boldsymbol{\alpha}+A\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 有 $A^2\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{aligned}AP&=A(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha})\\&=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因 P 可逆，于是

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

记 $B=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，而 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6$ 特征值 $2,-3$.

于是 A 有 2 个不同特征值从而 A 可相似对角化.

(方法二) 因 $A^2+A-6E=(A-2E)(A+3E)=(A+3E)(A-2E)$，

由 $A^2\boldsymbol{\alpha}+A\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $(A^2+A-6E)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，

于是 $(A-2E)(A+3E)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，

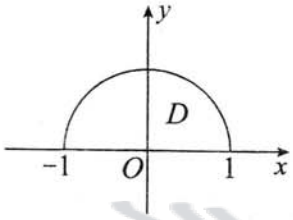
即 $(A-2E)(A\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，

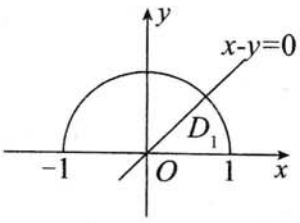
即 $A(A\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})=2(A\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})$，

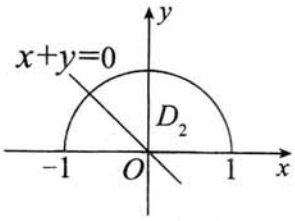
由 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是特征向量，有 $A\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$

从而 $\lambda=2$ 是 A 的特征值，类似有 $\lambda=-3$ 是特征值. 下略.

(22)【解】 (Ⅰ) (X,Y) 在 D 上均匀分布







$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0.\end{cases}\qquad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$$

$P\{Z_1=1\}=P\{X-Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{1}{4}$，故

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P\{Z_2=1\}=P\{X+Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_2\}=\frac{3}{4}$，故

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

考途
考路艰辛，征途有我

总之(Z_1,Z_2)的分布

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{(X,Y)\in D_1\cap D_2\}=\frac{1}{4}$$

所以

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

进一步有

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(Ⅱ)Z_1与Z_2的相关系数$\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}$

$$DZ_1=pq=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16},DZ_2=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},EZ_1=\frac{1}{4},EZ_2=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-EZ_1EZ_2=1\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$$

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{1/16}{\sqrt{3/16}\sqrt{3/16}}=\frac{1}{3}.$$

(23)【解】 $F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ $f(x)=F'(x)=\begin{cases}m\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{m-1}\cdot\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

(Ⅰ)$P\{T>t\}=\int_t^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=F(t)\Big|_t^{+\infty}=F(+\infty)-F(t)=\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m},t>0.$

$$P\{T>s+t\mid T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{\mathrm{e}^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{\mathrm{e}^{-(\frac{s}{\theta})^m}}$$

$$=\mathrm{e}^{-(\frac{t+s}{\theta})^m+(\frac{s}{\theta})^m}$$

(Ⅱ)给定$t_1,t_2,\cdots,t_n$,似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(t_i)=\prod_{i=1}^n m\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{m-1}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}=m^n\prod_{i=1}^n\frac{t_i^{m-1}}{\theta^m}\mathrm{e}^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln m+\sum_{i=1}^n(m-1)\ln t_i-mn\ln\theta-\sum_{i=1}^n\frac{t_i^m}{\theta^m}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-mn\dfrac{1}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{(-m)t_i^m}{\theta^{m+1}}=0,-\dfrac{n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{t_i^m}{\theta^{m+1}}=0,$

解得$\theta^m=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m$,不难验证为最大值.

最大似然估计值$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m}$.

考途
考路艰辛，征途有我