一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶是

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.　　(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.　　(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}dt$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(3) $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$

(A) $\dfrac{\pi^2}{4}$.　　(B) $\dfrac{\pi^2}{8}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{8}$.

(4) 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$,当 $n\geqslant 3$ 时,$f^{(n)}(0)=$

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$.　　(B) $\dfrac{n!}{n-2}$.　　(C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$.　　(D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$.

(5) 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$ 给出以下结论

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$　② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$　③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$　④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$

正确的个数是

(A)4.　　(B)3.　　(C)2.　　(D)1.

(6) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导,且 $f'(x)>f(x)>0$,则

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$.　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$.　　(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$.　　(D) $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$.

(7) 设4阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆,a_{12} 代数余子式 $A_{12}\neq 0$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵,则方程组 $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 通解为

(A) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(B) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(C) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(D) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值为1的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

二、填空题(9～14小题,每小题4分,共24分.)

(9) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$,$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ _____.

(10) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}dx=$ _____.

(11) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,\pi)}=$ _____.

(12) 斜边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中,且斜边与水面相齐,设重力加速度为 g,水密度为 ρ,则该平板一侧所受的水压力为_____.

(13) 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$,且 $y(0)=0,y'(0)=1$,则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ _____.

(14) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ _____.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$,并求曲线 $y=f(x)$,$y=\dfrac{1}{2}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

(19)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴围成,计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$.

(Ⅰ)证明:存在 $\xi\in(1,2)$,$f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$;

(Ⅱ)证明:存在 $\eta\in(1,2)$,$f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 可导,且 $f'(x)>0$,曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O,其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T,又 MP 垂直 x 轴于点 P. 已知由曲线 $y=f(x)$,直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 3∶2,求满足上述条件的曲线的方程.

(22)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 得 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

2020年全国硕士研究生招生考试

数学(二)参考答案

一、选择题

(1)【答案】 D

【解析】 (方法一) 利用结论:若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim g(x)$,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(A) $\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(B) $\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

(C) $\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(D) $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\sim\int_0^{1-\cos x}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5$.

故应选(D).

(方法二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小,则 $\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 是 $x\to 0$ 时的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

(A) $\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t, m=2, n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(B) $\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t, m=\frac{3}{2}, n=1$,则 $n(m+1)=\frac{5}{2}$.

(C) $\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t, m=2, n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(D) $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t, m=\frac{3}{2}, n=2$,则 $n(m+1)=5$.

故应选(D).

(2)【答案】 C

【分析】 由 $f(x)$ 的表达式可知,$f(x)$ 共有四个间断点,分别为

$x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$,则 $x=-1$ 为第二类间断点;

$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$, $x=0$ 为可去间断点;

$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\infty$,则 $x=1$ 为第二类间断点;

$x=2$: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$,则 $x=2$ 为第二类间断点.

故应选 C.

(3)【答案】 A

【分析】 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}$

$$= (\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

故应选 A.

(4)【答案】 A

【分析】 由 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$ 可知

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n)$$

$$f(x) = x^2\ln(1-x) = -\left(x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n}\right) + o(x^{n+2})$$

则 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}$, $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}$.

故应选 A.

(5)【答案】 B

【解析】 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1$,① 正确.

$y \neq 0$ 时, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{xy-y}{x}$ 不存在.

因而 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在,② 不正确.

显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$,③ 正确.

而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \text{ 或 } y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$,所以 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$,④ 正确.

故答案选(B).

【评注】 此题是对极限求法及偏导数定义的考察.

(6)【答案】 B

【解析】 (方法一) 直接法:

由 $f'(x) > f(x) > 0, x \in [-2,2]$ 可知,

$$f'(x) - f(x) > 0$$

从而有 $e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$,即 $[e^{-x}f(x)]' > 0$.

令 $F(x) = e^{-x}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调增,从而有

$$F(0) > F(-1)$$

即 $f(0) > ef(-1)$,从而有 $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$.

(方法二) 直接法:

由 $f'(x) > f(x) > 0, x \in [-2,2]$ 可知,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

则 $\int_{-1}^{x}\frac{f'(t)}{f(t)}dt > \int_{-1}^{x} 1dt \quad (x > -1)$

$$\ln f(x) - \ln f(-1) > x + 1$$

$$\frac{f(x)}{f(-1)} > e^{x+1}$$

令 $x=0$,则 $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.

(方法三) 排除法:

令 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$,显然,$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}>f(x)>0$.

$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}<1$,排除(A).

$\dfrac{f(1)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^{4}>\mathrm{e}^{2}$,排除(C).

$\dfrac{f(2)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^{6}>\mathrm{e}^{3}$,排除(D).

故应选 B.

(7)**【答案】** C

【解析】 选择题的4个选项,已经告诉你 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $\boldsymbol{A}$ 的3个列向量所构成.因此只要判断 $\boldsymbol{A}$ 的哪3个列向量是线性无关的.而条件就是 $A_{12}\neq 0$.

因

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0$$

意味 $(a_{21},a_{31},a_{41})^{\mathrm{T}},(a_{23},a_{33},a_{43})^{\mathrm{T}},(a_{24},a_{34},a_{44})^{\mathrm{T}}$ 线性无关,那么必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关(低维向量无关增加坐标高维向量必无关)

故应选(C).

【评注】 如果是解答题,你应当如何处理?

(8)**【答案】** D

【解析】 本题考查 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的基本知识.$\boldsymbol{P}$— 特征向量,$\boldsymbol{\Lambda}$— 特征值.且 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的位置对应要正确.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量.

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 特征向量,排除(A),(C),又对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$,故 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量应当是 $\lambda=1,\lambda=-1.\lambda=1$ 的顺序,排除(B).

(D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量,$-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量,故应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** $-\sqrt{2}$

【解析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3},$$

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

(10)【答案】 $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

【解析】 交换积分次序

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

(11)【答案】 $(\pi-1)dx-dy$

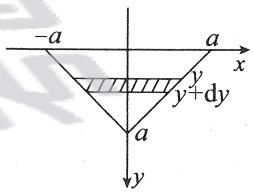
【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\Big|_{(0,\pi)}=-1$

所以 $dz\Big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)dx-dy$.

【评注】 也可利用全微分形式不变性求 dz.

(12)【答案】 $\frac{1}{3}\rho g a^3$



【解析】 如右图建立坐标系，考虑右图中窄带子所受压力

$$dF=\rho g\cdot 2(a-y)ydy$$

则 $F=2\rho g\int_0^a(a-y)ydy=\frac{1}{3}\rho g a^3$.

(13)【答案】 1

【解析】 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=-\int_0^{+\infty}(y''+2y')dx=-y'\Big|_0^{+\infty}-2y\Big|_0^{+\infty}$

只需计算 $y'(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$. 也可求出 $y(x)$，再计算 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$.

（方法一） 由特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 得 $\lambda_{1,2}=-1$，则

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x},y'(x)=(C_2-C_1-C_2x)e^{-x}$$

显然 $y(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0,y'(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=0$.

有 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=-y'\Big|_0^{+\infty}-2y\Big|_0^{+\infty}=y'(0)+2y(0)=1$.

（方法二） 由方法一 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

利用 $y(0)=0,y'(0)=1$ 得 $C_1=0,C_2=1$.

则 $y(x)=xe^{-x}$

所以 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

(14)【答案】 $a^2(a^2-4)$

【解析】 由行列式性质恒等变形，例如把 2 行加到 1 行，3 行加到 4 行，再 1 列的 -1 倍加到 2 列，4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

【评注】 基本计算题,解法非常多,也可每列都加到第1列,再消0,…

三、解答题

(15)【解】 (方法一) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-ax] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} \quad \left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t} = \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1}{t} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2\mathrm{e}} = b$$

故所求斜渐近线为 $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

(方法二) 由渐近线定义可知,若 $y = f(x) = ax+b+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$,则 $y = ax+b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} = x\left[1+\frac{1}{x}\right]^{-x} = x\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\mathrm{e}^{-x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$$

$$= x\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}}\left[1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{x}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{x}{\mathrm{e}}\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)$$

其中 $\dfrac{x}{\mathrm{e}}\cdot o\left(\dfrac{1}{x}\right)\to0$,当 $x\to+\infty$ 时,则曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 有斜渐近线 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

(16)【解】 由于 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$,则 $f(0) = 0$.

令 $xt = u$,则 $g(x) = \begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq0$ 时,$g'(x) = \dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$,

当 $x=0$ 时,$g'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$,

又$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=g'(0)$,

则 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(17)【解】 由$\begin{cases}f'_x=3x^2-y=0\\ f'_y=24y^2-x=0\end{cases}$得驻点为$(0,0)$,$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$.

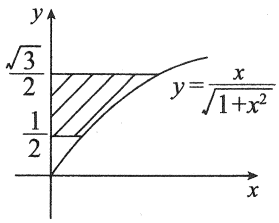
可计算 $A=f''_{xx}=6x,B=f''_{xy}=-1,C=f''_{yy}=48y$

判别式 $\Delta=AC-B^2=288xy-1$.

在$(0,0)$点处,$\Delta=-1<0$,不是极值点;

在$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$点处,$\Delta=3>0$ 且 $A=1>0$,取极小值为 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

(18)【解】 在 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 中将 x 换为$\dfrac{1}{x}$ 得



$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{1+x^2}}$$

由以上两式解得 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$V_x=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}yx\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}$$

(19)【分析】 根据被积函数的特点,应选择极坐标系.

【解】 直线 $x=1$ 及 $x=2$ 的极坐标方程分别为 $r=\sec\theta$ 及 $r=2\sec\theta$,则

$$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

而$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta$

$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

所求二重积分$\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(20)【证】 (Ⅰ)(方法一) 令 $F(x)=f(x)+(x-2)\mathrm{e}^{x^2}$,则 $F(1)=-\mathrm{e}<0$,

$$F(2)=f(2)=\int_1^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>0$$

由连续函数零点定理知 $\exists\xi\in(1,2)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$.

(方法二) 由于 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,则 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$ 等价于 $f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi)$.

$$(\xi-2)f'(\xi)+f(\xi)=0$$

令 $F(x)=(x-2)f(x)$,则 $F'(x)=(x-2)f'(x)+f(x)$.

又 $F(1)=-f(1)=0, F(2)=0$.

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(1,2)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi)$.

(Ⅱ) 令 $g(x)=\ln x$，由柯西定理知，$\exists\eta\in(1,2)$，使

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

即 $\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$，$f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

(21)【解】 设切点为 $M(x,y)$，过此点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，有 $T\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$. 由题意知

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\frac{y}{y'}\cdot y$$

两边对 x 求导

$$y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2yy'^2-y^2y''}{y'^2}，即\ 3yy''-2y'^2=0$$

令 $p=y'$，则 $y''=p\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程变为

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$$

有 $3y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p=0$ 或 $p=0$(舍去).

解得 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，亦是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y^{\frac{2}{3}}$，所以 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$.

而曲线经过原点，得 $C_2=0$，所求的曲线方程为 $y=Cx^3(C>0)$.

(22)【解】 (Ⅰ) 二次型 f 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 成二次型 g，故 f 和 g 有相同的正、负惯性指数. 因 $g=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$ 知 $p=2, q=0$.

于是二次型 f 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数为 0.

因二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1-2a)(\lambda-1+a)^2$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：$1-a, 1-a, 1+2a$.

从而 $\begin{cases}1-a>0,\\ 1+2a=0,\end{cases}$ 故 $a=-\dfrac{1}{2}$.

(Ⅱ) 由配方法 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$

$$=\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\right]+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases}z_1=x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3\\ z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_3\\ z_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$ (1)

有 $f=z_1^2+z_2^2$.

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_2 \\ z_2= \quad 2y_3 \\ z_3=y_1 \end{cases}$，即 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ (2)

则有 f 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $g=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

【评注】 坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 是不唯一的.

(23)【解】 (Ⅰ) 因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 不共线，即 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$ 可逆.

或(反证法) 若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆，有

$$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}|=0$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，于是 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$. 又 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量与已知条件矛盾.

(Ⅱ)(方法一) 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}) \\ &=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6$ 特征值 $2,-3$.

于是 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个不同特征值从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(方法二) 因 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，

由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，

于是 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，

即 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{A\alpha}+3\boldsymbol{\alpha})$，

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是特征向量，有 $\boldsymbol{A\alpha}+3\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$

从而 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，类似有 $\lambda=-3$ 是特征值. 下略.

2020年全国硕士研究生招生考试

数学(二)参考答案

一、选择题

(1)【答案】 D

【解析】 (方法一) 利用结论:若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim g(x)$,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(A) $\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(B) $\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

(C) $\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$.

(D) $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\sim\int_0^{1-\cos x}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5$.

故应选(D).

(方法二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小,则 $\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 是 $x\to 0$ 时的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

(A) $\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t, m=2, n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(B) $\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t, m=\frac{3}{2}, n=1$,则 $n(m+1)=\frac{5}{2}$.

(C) $\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t, m=2, n=1$,则 $n(m+1)=3$.

(D) $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t, m=\frac{3}{2}, n=2$,则 $n(m+1)=5$.

故应选(D).

(2)【答案】 C

【分析】 由 $f(x)$ 的表达式可知,$f(x)$ 共有四个间断点,分别为

$x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$,则 $x=-1$ 为第二类间断点;

$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$, $x=0$ 为可去间断点;

$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\infty$,则 $x=1$ 为第二类间断点;

$x=2$: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$,则 $x=2$ 为第二类间断点.

故应选 C.

(3)【答案】 A

【分析】 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}$

$$= (\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

故应选 A.

(4)【答案】 A

【分析】 由 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$ 可知

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n)$$

$$f(x) = x^2\ln(1-x) = -\left(x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n}\right) + o(x^{n+2})$$

则 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}$, $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}$.

故应选 A.

(5)【答案】 B

【解析】 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1$,① 正确.

$y \neq 0$ 时, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{xy-y}{x}$ 不存在.

因而 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在,② 不正确.

显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$,③ 正确.

而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \text{ 或 } y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$,所以 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$,④ 正确.

故答案选(B).

【评注】 此题是对极限求法及偏导数定义的考察.

(6)【答案】 B

【解析】 (方法一) 直接法:

由 $f'(x) > f(x) > 0, x \in [-2,2]$ 可知,

$$f'(x) - f(x) > 0$$

从而有 $e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$,即 $[e^{-x}f(x)]' > 0$.

令 $F(x) = e^{-x}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调增,从而有

$$F(0) > F(-1)$$

即 $f(0) > ef(-1)$,从而有 $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$.

(方法二) 直接法:

由 $f'(x) > f(x) > 0, x \in [-2,2]$ 可知,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

则 $\int_{-1}^{x}\frac{f'(t)}{f(t)}dt > \int_{-1}^{x} 1dt \quad (x > -1)$

$$\ln f(x) - \ln f(-1) > x + 1$$

$$\frac{f(x)}{f(-1)} > e^{x+1}$$

令 $x=0$，则 $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.

（方法三） 排除法：

令 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，显然，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}>f(x)>0$.

$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}<1$，排除(A).

$\dfrac{f(1)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^{4}>\mathrm{e}^{2}$，排除(C).

$\dfrac{f(2)}{f(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^{6}>\mathrm{e}^{3}$，排除(D).

故应选 B.

(7)**【答案】** C

【解析】 选择题的 4 个选项，已经告诉你 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个列向量所构成. 因此只要判断 $\boldsymbol{A}$ 的哪 3 个列向量是线性无关的. 而条件就是 $A_{12}\neq 0$.

因

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\neq 0$$

意味 $(a_{21},a_{31},a_{41})^{\mathrm{T}}$，$(a_{23},a_{33},a_{43})^{\mathrm{T}}$，$(a_{24},a_{34},a_{44})^{\mathrm{T}}$ 线性无关，那么必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关（低维向量无关增加坐标高维向量必无关）

故应选(C).

【评注】 如果是解答题，你应当如何处理？

(8)**【答案】** D

【解析】 本题考查 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的基本知识. $\boldsymbol{P}$— 特征向量，$\boldsymbol{\Lambda}$— 特征值. 且 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的位置对应要正确.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量.

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 特征向量，排除(A)，(C)，又对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量应当是 $\lambda=1,\lambda=-1.\lambda=1$ 的顺序，排除(B).

(D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量，$-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=-1$ 的特征向量，故应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** $-\sqrt{2}$

【解析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3},$$

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

(10)【答案】 $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

【解析】 交换积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

(11)【答案】 $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

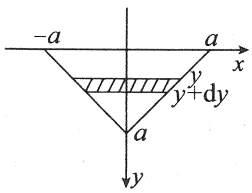
【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\Big|_{(0,\pi)}=-1$

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

【评注】 也可利用全微分形式不变性求 $\mathrm{d}z$.

(12)【答案】 $\frac{1}{3}\rho g a^3$



【解析】 如右图建立坐标系，考虑右图中窄带子所受压力

$$\mathrm{d}F=\rho g\cdot 2(a-y)y\mathrm{d}y$$

则 $F=2\rho g\int_0^a(a-y)y\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\rho g a^3$.

(13)【答案】 1

【解析】 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}(y''+2y')\mathrm{d}x=-y'\Big|_0^{+\infty}-2y\Big|_0^{+\infty}$

只需计算 $y'(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$. 也可求出 $y(x)$，再计算 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$.

（方法一） 由特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 得 $\lambda_{1,2}=-1$，则

$$y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x},y'(x)=(C_2-C_1-C_2x)\mathrm{e}^{-x}$$

显然 $y(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0,y'(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=0$.

有 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-y'\Big|_0^{+\infty}-2y\Big|_0^{+\infty}=y'(0)+2y(0)=1$.

（方法二） 由方法一 $y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$.

利用 $y(0)=0,y'(0)=1$ 得 $C_1=0,C_2=1$.

则 $y(x)=x\mathrm{e}^{-x}$

所以 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

(14)【答案】 $a^2(a^2-4)$

【解析】 由行列式性质恒等变形，例如把 2 行加到 1 行，3 行加到 4 行，再 1 列的 -1 倍加到 2 列，4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

【评注】 基本计算题，解法非常多，也可每列都加到第 1 列，再消 0，…

三、解答题

(15)【解】（方法一） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-ax] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} \quad \left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t} = \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1}{t} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2\mathrm{e}} = b$$

故所求斜渐近线为 $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

（方法二） 由渐近线定义可知，若 $y = f(x) = ax+b+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$，则 $y = ax+b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} = x\left[1+\frac{1}{x}\right]^{-x} = x\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\mathrm{e}^{-x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$$

$$= x\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}}\left[1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{x}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{x}{\mathrm{e}}\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)$$

其中 $\dfrac{x}{\mathrm{e}}\cdot o\left(\dfrac{1}{x}\right)\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，则曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 有斜渐近线 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

(16)【解】 由于 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$，则 $f(0) = 0$.

令 $xt = u$，则 $g(x) = \begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq0$ 时，$g'(x) = \dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$，

当 $x=0$ 时，$g'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$，

又$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0),$$

则 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(17)【解】 由$\begin{cases}f'_x=3x^2-y=0\\ f'_y=24y^2-x=0\end{cases}$得驻点为$(0,0)$，$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$.

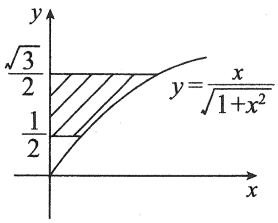
可计算 $A=f''_{xx}=6x,B=f''_{xy}=-1,C=f''_{yy}=48y$

判别式 $\Delta=AC-B^2=288xy-1$.

在$(0,0)$点处，$\Delta=-1<0$，不是极值点；

在$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$点处，$\Delta=3>0$ 且 $A=1>0$，取极小值为 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

(18)【解】 在 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 中将 x 换为$\dfrac{1}{x}$ 得



$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{1+x^2}}$$

由以上两式解得 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$V_x=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}yx\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}$$

(19)【分析】 根据被积函数的特点，应选择极坐标系.

【解】 直线 $x=1$ 及 $x=2$ 的极坐标方程分别为 $r=\sec\theta$ 及 $r=2\sec\theta$，则

$$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

而$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta$

$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta$$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

所求二重积分$\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(20)【证】 (Ⅰ)(方法一) 令 $F(x)=f(x)+(x-2)\mathrm{e}^{x^2}$，则 $F(1)=-\mathrm{e}<0$，

$$F(2)=f(2)=\int_1^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>0$$

由连续函数零点定理知 $\exists\xi\in(1,2)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$.

(方法二) 由于 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$ 等价于 $f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi)$.

$$(\xi-2)f'(\xi)+f(\xi)=0$$

令 $F(x)=(x-2)f(x)$，则 $F'(x)=(x-2)f'(x)+f(x)$.

又 $F(1)=-f(1)=0, F(2)=0$.

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(1,2)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi)$.

（Ⅱ）令 $g(x)=\ln x$，由柯西定理知，$\exists\eta\in(1,2)$，使

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

即 $\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$，$f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

(21)【解】 设切点为 $M(x,y)$，过此点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，有 $T\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$. 由题意知

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\frac{y}{y'}\cdot y$$

两边对 x 求导

$$y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2yy'^2-y^2y''}{y'^2}，即\ 3yy''-2y'^2=0$$

令 $p=y'$，则 $y''=p\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程变为

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$$

有 $3y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p=0$ 或 $p=0$（舍去）.

解得 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，亦是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y^{\frac{2}{3}}$，所以 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$.

而曲线经过原点，得 $C_2=0$，所求的曲线方程为 $y=Cx^3(C>0)$.

(22)【解】（Ⅰ）二次型 f 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 成二次型 g，故 f 和 g 有相同的正、负惯性指数. 因 $g=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$ 知 $p=2, q=0$.

于是二次型 f 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数为 0.

因二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1-2a)(\lambda-1+a)^2$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：$1-a, 1-a, 1+2a$.

从而 $\begin{cases}1-a>0,\\ 1+2a=0,\end{cases}$ 故 $a=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）由配方法 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$

$$=\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\right]+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases}z_1=x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3\\ z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_3\\ z_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$ (1)

有 $f = z_1^2 + z_2^2$.

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = \quad\quad 2y_3 \\ z_3 = y_1 \end{cases}$，即 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ (2)

则有 f 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $g = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

【评注】 坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 是不唯一的.

(23)【解】 (Ⅰ) 因 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 不共线，即 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})$ 可逆.

或(反证法) 若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆，有

$$|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}| = 0$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，于是 $\boldsymbol{A\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}$. 又 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量与已知条件矛盾.

(Ⅱ)(方法一) 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，而 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$ 特征值 $2, -3$.

于是 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个不同特征值从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(方法二) 因 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})$，

由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

于是 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

即 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha}) = 2(\boldsymbol{A\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha})$，

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是特征向量，有 $\boldsymbol{A\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$

从而 $\lambda = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，类似有 $\lambda = -3$ 是特征值. 下略.