

2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是()
(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$. (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.
(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$. (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.
- (2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为()
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分.记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 则()
(A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.
- (4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是()
(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.
(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.
(D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
- (5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵.若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则()
(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.
- (6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为()
(A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = 0, b$ 为任意常数.
(C) $a = 2, b = 0$. (D) $a = 2, b$ 为任意常数.
- (7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\}$ ($i = 1, 2, 3$), 则()
(A) $p_1 > p_2 > p_3$. (B) $p_2 > p_1 > p_3$.
(C) $p_3 > p_1 > p_2$. (D) $p_1 > p_3 > p_2$.



(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X + Y = 2\} = (\quad)$

(A) $\frac{1}{12}$.

(B) $\frac{1}{8}$.

(C) $\frac{1}{6}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量, 求 n 与 a 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.



(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

(18) (本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60 000 元, 可变成本为 20 元 / 件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1\,000}$

(p 是单价, 单位: 元; Q 是销量, 单位: 件). 已知产销平衡, 求:

- (I) 该商品的边际利润;
- (II) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;
- (III) 使得利润最大的定价 p .

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. 证明:

- (I) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;
- (II) 对 (I) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .



(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 在给定 $X = x$

$(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(III) 求 $P\{X > 2Y\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.





2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 ()

- (A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$
- (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$
- (C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$
- (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

【答案】D

【解析】 $o(x) + o(x^2) = o(x)$ ，故 D 错误。

(2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

【答案】C

【解析】由题意可知 $f(x)$ 的间断点为 $0, \pm 1$ 。又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x(x+1)\ln x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-x)^x - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln(-x)} - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x(x+1)\ln x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-x)^x - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln(-x)} - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)} = \infty$$

故 $f(x)$ 的可去间断点有 2 个。



(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$ ($k=1, 2, 3, 4$),

则 ()

(A) $I_1 > 0$

(B) $I_2 > 0$

(C) $I_3 > 0$

(D) $I_4 > 0$

【答案】B

【解析】令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则有

$$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy = \int_0^1 r dr \int_\alpha^\beta (r \sin \theta - r \cos \theta) d\theta = -\frac{1}{3}(\cos \theta + \sin \theta) \Big|_\alpha^\beta$$

故当 $k=2$ 时, $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$, 此时有 $I_2 = \frac{2}{3} > 0$. 故正确答案选 B.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ()

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在

(D) 若存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

【答案】D

【解析】根据正项级数的比较判别法, 当 $P > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ 同

敛散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 C 可逆, 则 ()

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价



- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
 (D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】(B)

【解析】由 $C = AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A = CB^{-1}$ ，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为 (B)。

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a = 0, b = 2$
 (B) $a = 0, b$ 为任意常数
 (C) $a = 2, b = 0$
 (D) $a = 2, b$ 为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的

充分必要条件为 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $2, b, 0$ 。

又 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - b)(\lambda - 2) - 2a^2]$ ，从而 $a = 0, b$ 为任意常数。

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0, 1)$ ， $X_2 \sim N(0, 2^2)$ ， $X_3 \sim N(5, 3^2)$ ，

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\} (j = 1, 2, 3)$ ，则 ()

- (A) $P_1 > P_2 > P_3$
 (B) $P_2 > P_1 > P_3$
 (C) $P_3 > P_1 > P_2$
 (D) $P_1 > P_3 > P_2$



【答案】(A)

【解析】由 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$ 知,

$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = P\{|X_1| \leq 2\} = 2\Phi(2) - 1,$$

$$p_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\{|X_2| \leq 2\} = 2\Phi(1) - 1, \text{ 故 } p_1 > p_2.$$

由根据 $X_3 \sim N(5,3^2)$ 及概率密度的对称性知, $p_1 > p_2 > p_3$, 故选 (A)

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 X 和 Y 的概率分布分别为,

X	0	1	2	3	Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{12}$
- (B) $\frac{1}{8}$
- (C) $\frac{1}{6}$
- (D) $\frac{1}{2}$

【答案】(C)

【解析】 $P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} + P\{X=3, Y=-1\}$, 又根据题意 X, Y 独立,

故

$$P\{X+Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=2\}P\{Y=0\} + P\{X=3\}P\{Y=-1\} = \frac{1}{6}, \text{ 选 (C).}$$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设曲线 $y = f(x)$ 和 $y = x^2 - x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-2

【解析】 $y = x^2 - x$ 在 $(1,0)$ 处的导数是 $y'(1) = 1$, 故 $f'(1) = 1, f(1) = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 - \frac{2}{n+2}\right) - f(1)}{-\frac{2}{n+2}} \times \left(-\frac{2n}{n+2}\right) = f'(1) \times (-2) = -2$$



(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2 - 2\ln 2$

【解析】 原式为 $e^{x\ln(z+y)} = xy$, 左右两边求导得: $xy[\ln(z+y) + x \cdot \frac{z_x}{z+y}] = y$, 令 $x=1, y=2$

得 $z=0, z_x = 2(1 - \ln 2)$

(11) 求 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$ _____。

【答案】 $\ln 2$

【解析】 $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \int \ln x d(-\frac{1}{1+x}) = -\frac{\ln x}{1+x} + \int \frac{1}{x(1+x)} dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} \right) - \left(-\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} \right)_{x=1} = \ln 2$

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $e^{\frac{1}{2}x}(C_1x + C_2)$

【解析】 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0, \lambda = \frac{1}{2}$ (二重根), 所以通解为 $y = e^{\frac{1}{2}x}(C_1x + C_2)$

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若

$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 -1

【解析】

由 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 可知, $A^T = -A^*$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= -\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = -\sum_{i=1}^3 a_{ij}^2 < 0 \end{aligned}$$

从而有 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A|^2$, 故 $|A| = -1$ 。

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2e^2$



【解析】由 $X \sim N(0,1)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}[(x-2)^2-4]} dx = 2e^2.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = 1$$

又因为：

$$\begin{aligned} & 1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \\ &= 1 - \cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \\ &= 1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{ax^n} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^n} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)}{ax^n} \right) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } n = 2 \text{ 且 } \frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = 1 \Rightarrow a = 7$$

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ ，直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形， V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴， y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y = 10V_x$ ，求 a 的值。

【解析】由题意可得：

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}$$

$$\text{因为： } V_y = 10V_x \text{ 所以 } \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$$

(17) (本题满分 10 分)



设平面内区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成. 计算 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

【解析】 $\iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy$

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy$$

$$= \frac{416}{3}$$

(18) (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$, (P 是单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

- (1) 该商品的边际利润。
- (2) 当 $P=50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义。
- (3) 使得利润最大的定价 P 。

【解析】(I) 设利润为 l , 则 $l = PQ - (20Q + 6000) = 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 6000$

边际利润 $l' = 40 - \frac{Q}{500}$

(II) 当 $P = 50$ 时, 边际利润为 20,

经济意义为: 当 $P = 50$ 时, 销量每增加一个, 利润增加 20

(III) 令 $l' = 0$, 得 $Q = 20000$, 此时 $P = 60 - \frac{Q}{1000} = 40$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上可导, $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

(1) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$

(2) 对 (1) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

【答案】(I) 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \therefore \exists X, \text{当 } x > X \text{ 时, 有 } f(x) > \frac{3}{2},$

$f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 根据连续函数介值定理, 存在 $a \in [0, X]$, 使得 $f(a) = 1$

(II) $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续且可导, 根据拉格朗日中值定理,

$$f(a) - f(0) = f'(\xi)a = 1, \xi \in (0, a),$$

故 $\exists \xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$

(20) (本题满分 11 分)



设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

【解析】

由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵, 故可设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 则由 $AC - CA = B$ 可得线性方程组:

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{pmatrix}$$

由于方程组 (1) 有解, 故有 $1+a=0, b-1-a=0$, 即 $a=-1, b=0$, 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故有 } \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 任意.}$$

从而有 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【答案】(1)



$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 + (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\text{则 } f \text{ 的矩阵为 } \begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} \\ = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$$

(2) 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则 $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, $A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 则 1, 2 均为 A 的特征值, 又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 故 0 为 A 的特征值, 则三阶矩阵 A 的特征值为 2, 1, 0, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$

(22) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在给定 $X = x (0 < x < 1)$ 的

条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(2) Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$.

【答案】(1) $f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_N 为来自总体

X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

【答案】(1) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} d(-\frac{\theta}{x}) = \theta$, 令 $EX = \bar{X}$, 故 θ 矩估计量为 \bar{X} .



$$(2) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \theta^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_i > 0$ 时,

$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0,$$

$$\text{得 } \theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, \text{ 所以得 } \theta \text{ 极大似然估计量 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

