2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是(　　)

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.　　(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.　　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分.记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\,dx\,dy\ (k = 1, 2, 3, 4)$,则(　　)

(A) $I_1 > 0$.　　(B) $I_2 > 0$.　　(C) $I_3 > 0$.　　(D) $I_4 > 0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　)

(A) $a = 0,\ b = 2$.　　(B) $a = 0$,b 为任意常数.

(C) $a = 2,\ b = 0$.　　(D) $a = 2$,b 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量,且 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,2^2)$, $X_3 \sim N(5,3^2)$, $p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}$ $(i = 1,2,3)$,则(　　)

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.　　(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.　　(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=($　　$)$

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ______.

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ______.

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ______.

(12) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积.若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60 000 元,可变成本为 20 元/件,价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1\,000}$(p 是单价,单位:元;Q 是销量,单位:件).已知产销平衡,求:

(Ⅰ)该商品的边际利润;

(Ⅱ)当 $p=50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(Ⅲ)使得利润最大的定价 p.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.证明:

(Ⅰ)存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$.当 a, b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型f对应的矩阵为$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$正交且均为单位向量,证明f在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设(X,Y)是二维随机变量,X的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$在给定$X=x$ $(0<x<1)$的条件下Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅰ)求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$;

(Ⅱ)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$;

(Ⅲ)求$P\{X>2Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.

(Ⅰ)求θ的矩估计量;

(Ⅱ)求θ的最大似然估计量.