2014年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当$x\to 0^+$时,若$\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$均是比$x$高阶的无穷小量,则$\alpha$的取值范围是(　　)

(A)$(2,+\infty)$.　(B)$(1,2)$.　(C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$.　(D)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A)$y=x+\sin x$.　(B)$y=x^2+\sin x$.　(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$.　(D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

(3) 设函数$f(x)$具有2阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上,(　　)

(A) 当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$.　(B) 当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(C) 当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$.　(D) 当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(4) 曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是(　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$.　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$.　(C)$10\sqrt{10}$.　(D)$5\sqrt{10}$.

(5) 设函数$f(x)=\arctan x$. 若$f(x)=xf'(\xi)$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$(　　)

(A)1.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{1}{3}$.

(6) 设函数$u(x,y)$在有界闭区域D上连续,在D的内部具有2阶连续偏导数,且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则(　　)

(A)$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得.

(B)$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得.

(C)$u(x,y)$的最大值在D的内部取得,最小值在D的边界上取得.

(D)$u(x,y)$的最小值在D的内部取得,最大值在D的边界上取得.

(7) 行列式$\begin{vmatrix}0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=$(　　)

(A)$(ad-bc)^2$.　(B)$-(ad-bc)^2$.　(C)$a^2d^2-b^2c^2$.　(D)$b^2c^2-a^2d^2$.

(8) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维向量,则对任意常数$k,l$,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的(　　)

(A) 必要非充分条件.　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　(D) 既非充分也非必要条件.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx =$ ______.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ______.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $dz\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$ ______.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$,则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是______.

(13) 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ ______.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$,且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

（Ⅰ）$0\leqslant \int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a,\ x\in[a,b]$；

（Ⅱ）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(20)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$. 定义函数列：

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f(f_1(x)),\quad \cdots,\quad f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\quad \cdots.$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$，且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$，求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(Ⅱ) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B.

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

2014年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

1.B

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^\alpha(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(2x)^\alpha}{x}=2^\alpha\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{\alpha}-1}=0$$

$$\therefore\frac{2}{\alpha}-1>0\therefore\alpha<2$$

2、C

$$y=x+\sin\frac{1}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore y=x+\sin\frac{1}{x}\text{存在斜渐近线}y=x$$

3、D

举例：

$$\text{令}f\left(x\right)=x^2,\text{则在}[0,1]\text{区间}$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

$$\therefore g\left(x\right)=0\cdot(1-x)+1\cdot x=x$$

$$\therefore f\left(x\right)\le g\left(x\right)$$

$$\text{又}f''\left(x\right)=2\ge0\therefore D$$

4. C

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+4}{2t}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{2\cdot 2t-2(2t+4)}{(2t)^2}}{2t}=\frac{-8}{(2t)^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=-1$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore R=\frac{1}{k}=(1+3^2)^{\frac{3}{2}}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$$

5、D

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}$. 故 $\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\cdot\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

6、A

排除法当 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$，因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 与 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 异号.

$AC-B^2<0$，函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内没有极值.

连续函数在有界闭区域内有最大值和最小值，故最大值和最小值在 D 的边界点取到.

7、B

解析：

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$$

$$=a\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}+c\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}$$

$$=-a\times d\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}-c\times b\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=(bc-ad)\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-(ad-bc)^2$$

8、A

解析：

已知α_1，α_2，α_3无关

设$\lambda_1(\alpha_1+k\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$

即$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$

从而$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关

反之，若$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关，不一定有α_1，α_2，α_3无关

例如，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

9. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{3}{8}\pi$

10.

$f'(x)=2(x-1)x\in[0,2]$

$\therefore f(x)=x^2-2x+c$

又$f(x)$是奇函数

$\therefore f(0)=0 \therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$

$x\in[0,2]$

$f(x)$的周期为4

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1$

11、解：方程两边对 x 求偏导：

$$e^{2yz}(2y\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+2x+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

代入$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

两边对y求偏导

$$e^{2yz}(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y})+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

代入$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

12. 解：把极坐标方程化为直角坐标方程

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$$

则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\begin{cases} x = \theta\cos\theta = 0 \\ y = \theta\sin\theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

则切线方程为

$$(y-\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi}(x-0)$$

化简为

$$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$$

13、质心的横坐标：

$$\frac{\int_0^1 x f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,dx}{\int_0^1 (-x^2+2x+1)\,dx} = \frac{\left.(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\right|_0^1}{\left.(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\right|_0^1} = \frac{11}{20}$$

14、

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2a x_1x_3 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1 + a x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2 - a^2 x_3^2$$

$\because$ f的负惯性指数为1

$\therefore$ $4-a^2 \geq 0$

$\therefore$ $-2 \leq a \leq 2$

15.

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (\mathrm{t}^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (\mathrm{t}^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to\infty}x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})$$

$$令\frac{1}{x}=t\lim_{x\to\infty}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+t+\frac{1}{2}t^2+\mathrm{O}(\mathrm{t}^2)-1-\mathrm{t}}{t^2}=\frac{1}{2}$$

16、

解：

$\because x^2+y^2y'=1-y'$

$\therefore y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

令$y'=0,\therefore x=\pm1$

$\therefore y''=\dfrac{-2x(y^2+1)-(1-x^2)\cdot 2yy'}{(y^2+1)^2}$

又$\because y'(1)=y'(-1)=0$

$\therefore y''(1)=\dfrac{-2}{y^2(1)+1}\langle 0,\therefore y(1)$为极大值

$y''(-1)=\dfrac{2}{y^2(1)+1}\rangle 0, y(-1)$为极小值

下求极值

$\because y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1},\therefore (y^2+1)dy=(1-x^2)dx,\therefore \int(y^2+1)dy=\int(1-x^2)dx$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+c$

又　$y(2)=0$

$\therefore c=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$

代入 $x=1$

$\therefore \frac{1}{3}y^3(1)+y(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$\therefore y(1)=1$

代入 $x=-1$,

$\therefore \frac{1}{3}y^3(-1)+y(-1)=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$

$\therefore y(-1)=0$

17、

解：积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，利用轮对称行，

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin(\pi r)r\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{4}\int_1^2 rd\cos(\pi r)$$

$$=-\frac{1}{4}r\cos(\pi r)|_1^2+\frac{1}{4}\int_1^2\cos(\pi r)\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

18、

解 ：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^{x}\cdot\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos y\cdot(f''\cdot e^{x}\cdot\cos y\cdot e^{x}+f'\cdot e^{x})=f''\cdot(e^{x}\cdot\cos y)^2+f'\cdot e^{x}\cdot\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot e^{x}\cdot(-\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^{x}[f''\cdot e^{x}\cdot(-\sin y)+f'\cdot\cos y]=(e^{x})^2\sin y^2 f''-f'\cdot\cos y\cdot e^{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot e^{2x}=(4z+e^{x}\cdot\cos y)e^{2x}$$

$\therefore\ f''(e^{x}\cdot\cos y)=4f(e^{x}\cdot\cos y)+e^{x}\cdot\cos y$

令$t=e^{x}\cdot\cos y,\therefore f''(t)=4f(t)+t$

$\therefore\ y''-4y=x$

求特征值：

$\lambda^2-4=0\quad\therefore\ x=\pm2\quad\therefore\ y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

再求非其次特征值。

$y^*=(ax+b)$　代入　$\therefore y^*=-\frac{1}{4}x$

$\therefore\ y=y(x)+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x$

$y(0)=0=C_1+C_2$

$y'(0)=0=x_1-x_2-\frac{1}{4}$

$$\therefore\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_1-2C_2=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{16}\\C_2=-\frac{1}{16}\end{cases}$$

$$\therefore\ f(\mu)=\frac{1}{16}e^{2\mu}-\frac{1}{16}e^{-2\mu}-\frac{1}{4}\mu$$

19.

解：(I)

$h_1(x)=\int_a^x g(t)dt$

$h_1(a)=0$

$h_1'(x)=g(x)\geq 0$

$\therefore h_1(x)$单调不减

$\therefore$当$x\in[a,b]$时，$h_1(x)\geq 0$

$h_2(x)=\int_a^x g(t)dt-x+a$

$h_2'(x)=g(x)-1$

$\because 0\leq g(x)\leq 1 \therefore h_2'(x)\leq 0$

$\therefore h_2(x)$单调不增又$h_2(a)=0$

$\therefore$当$x\in[a,b]$时，$h_2(x)\leq 0$

$p(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$

$p'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\cdot g(x)=\left[f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\right]g(x)$

$\because 0\leq g(x)\leq 1$

$\therefore \int_a^x g(t)dt\leq \int_a^x dt=x-a \therefore a+\int_a^x g(t)dt\leq x$

又$f(x)$单调增加

（II）$\therefore f(x)\geq f[a+\int_a^x g(t)dt] \therefore p'(x)\geq 0$

$\therefore p(x)$单调不减

又$p(a)=0 \therefore p(b)\geq 0$

即$\int_a^b f(x)g(x)dx\geq \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx$

20、

解：

$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $f_1(x)=f(x)$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}$$

用归纳法知：$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$, $x\in[0,1]$

$$S_n=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{nx+1-1}{1+nx}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)]=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$=1$$

21.

解：

因 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 则

$$f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$$

$$\begin{cases}f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\\ f(y,y)=y^2+2y+\varphi(y)\end{cases}$$

则$\varphi(y)=y-1$

故$f(x,y)=y^2+2y+x-1$

$$f(x,y)=0\Rightarrow x=-y^2-2y+1$$

$$V=\int_0^2\pi\left(f(x)+1\right)^2dx=\int_0^2\pi\left[f^2(x)+2f(x)+1\right]dx=\int_0^2\pi(2-x)dx=\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=2\pi$$

22、

解：

$$(A)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-4r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_3+r_1]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1&=-x_4\\x_2&=2x_4\\x_3&=3x_4\\x_4&=x_4\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$ c 为任意常数

设 $B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1\\0&1&-1&1&\vdots&0\\1&2&0&-3&\vdots&0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&0\\0&1&-1&1&\vdots&1\\1&2&0&-3&\vdots&0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&0\\0&1&-1&1&\vdots&0\\1&2&0&-3&\vdots&1\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\1&2&0&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\0&4&-3&1&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\0&0&1&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5&\vdots&4&12&-3\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\vdots&2&6&-1\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&-3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2, c_3为任意常数

23、

解：

$$设A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以A 的n个特征值为λ_1=n, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n$=0

又因为A是一个实对称矩阵，所以A可以相似对角化，且

$$A \;□ \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - N \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以B 的n个特征值为λ_1'=n, $\lambda_2' = \cdots = \lambda_n'$=0

$$又|0E - B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

所以r(0 E− B) = 1

故B 的n−1重特征值0有n−1个线性无关的特征向量

所以 B 也可以相似对角化，且 $B \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

所以 A 与 B 相似。