

## 2022 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(三)试题

一、选择题: 1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项

是符合题目要求的.

(1)  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  是非零无穷小量, 给出以下 4 个命题:

- ①若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ ;
- ②若  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;
- ③若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ;
- ④若  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

其中真命题是: ( )

- (A) ①③.                      (B) ①④.
- (C) ①③④.                  (D) ②③④.

(2) 已知  $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}$ , ( $n=1, 2, \dots, n$ ), 则 ( )

- (A) 有最大值, 有最小值.
- (B) 有最大值, 没有最小值.
- (C) 没有最大值, 有最小值.
- (D) 没有最大值, 没有最小值.

(3)  $f(t)$  连续,  $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$ , 则 ( )

- (A)  $F'_x(x, y) = F'_y(x, y), F''_{xx}(x, y) = F''_{yy}(x, y)$ .
- (B)  $F'_x(x, y) = F'_y(x, y), F''_{xx}(x, y) = -F''_{yy}(x, y)$ .
- (C)  $F'_x(x, y) = -F'_y(x, y), F''_{xx}(x, y) = F''_{yy}(x, y)$
- (D)  $F'_x(x, y) = -F'_y(x, y), F''_{xx}(x, y) = -F''_{yy}(x, y)$

(4)  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$ ,  $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$ , 则 ( )

- (A)  $I_1 < I_2 < I_3$ .
- (B)  $I_2 < I_1 < I_3$ .
- (C)  $I_1 < I_3 < I_2$
- (D)  $I_3 < I_2 < I_1$

(5) 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  的特征值为  $1, -1, 0$  的充分必要条件是

( )

(A) 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $A = PAQ$

(B) 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = PAP^{-1}$

(C) 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $A = QAQ^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = PAP^T$

(6) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  解的情况为 ( )

(A) 无解

(B) 有解

(C) 有无穷多解或无解

(D) 有唯一解或无解

(7) 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ , 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  等价,

则的取值范围是 ( )

(A)  $\{0, 1\}$

(B)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$

(C)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$

(D)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

(8) 设随机变量  $X \sim N(0, 4), Y \sim B(3, \frac{1}{3})$ , 且  $X$  与  $Y$  不相关, 则  $D(X - 3Y + 1) = ( )$

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 10.

(9) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $X_i$  的概率密度  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  则

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  依概率收敛于( )

- (A)  $\frac{1}{8}$ . (B)  $\frac{1}{6}$ . (C)  $\frac{1}{3}$ . (D)  $\frac{1}{2}$

(10) 二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	$b$
1	$a$	0.1	0.1

已知事件  $\{\max(X, Y) = 2\}$  与事件  $\{\min(X, Y) = 1\}$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = ( \quad )$

(A) -0.6.

(B) -0.36.

(C) 0.

(D) 0.48.

**二、填空题: 11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.**

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12)  $\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设  $f(x) = e^{\sin x} + e^{-\sin x}$ ,  $f'''(2\pi) =$

(14)  $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 求  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x)dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(15) 已知  $A$  是 3 阶矩阵, 将  $A$  第 2 行与第 3 行互换, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列得

矩阵  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^{-1}$  为  $A$  的逆, 则  $tr(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(16) 设  $A, B, C$  为随机事件, 且  $A$  与  $B$  互不相容,  $A$  与  $C$  互不相容,  $B$  与  $C$  相互独立,

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题：17~22 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本题满分 10 分)

设函数  $y(x)$  是微分方程  $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$  的满足  $y(1) = 3$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  的渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

某单位产品产量  $Q$  由资本投入量  $x$  和劳动投入量  $y$  决定, 生产函数  $Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$ , 销售单价  $p$  与  $Q$  的关系  $p = 1160 - 1.5Q$ . 若单位资本投入和劳动投入的价格分别为 6 和 8, 求利润最大时的产量.

(19) (本题满分 12 分)

已知区域  $D$  为  $\{(x, y) \mid y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$ , 计算  $I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$ .

(20) (本题满分 12 分)

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n + 1}{4^n (2n + 1)} x^{2n}$  的收敛域及和函数  $S(x)$ .

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ ,

(1) 求正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$  化二次型为标准型;

(2) (2) 证明  $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$ .

(22) (本题满分 12 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自均值为  $\theta$  的指数分布总体的简单随机样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  为来自均值为  $2\theta$  的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中  $\theta (\theta > 0)$  是未知参数, 利用样本  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}$ , 并求  $D(\hat{\theta})$ .

a ž 3.< !.J0→+U › œ5 669B

! œ ? B NÎ

6 =F? NÎ Æ ENÎ " ENÎ < § <° A M" NÎ5 0,° `F?N c ? 6 `F?N`  
e1\>NÎ-\$?. "x,°°

Ä Ä & È È \_MŽM& 0§ ?Gÿ È5 \* ; Z -NÈ Ö

79 È I

89 È I

99 È I

: 9 È I

! ]-O -NÈ \_ ÖÄ Ä

Ä \$Ä 79 Ä %Ä 7 :

Ä &Ä 79 : Ä ' Ä 89 :

İ1,,xĐ Ä &Ä

İ@ Ä Đ

79 È !" È 7!"

.ž

8KI È ý »

99 È È È

!" È 9!"ž

: 9 È I È I

È I È £ È : !"ž

!"-O -NÈ 9 79: ÈF9 &

Ä Ä ". È È I Ä Ä

Ä \$Ä 90WIÈ 90?I

Ä %Ä 90WIÈ"Ñ 90?I

Ä &Ä"Ñ 90WIÈ 90?I

Ä ' Ä"Ñ 90WIÈ"Ñ 90?I

İ1,,xĐ Ä \$Ä

İ@ Ä Đ

È !" ò9+| Diž ,´...B3 W Ç &...ÎÈ &...ÿÈ  
!" ;+|\_ È ¼ \_0W,´TZIÈ)¾ G •B\$È È È

f &È X ] 0WIÈ X ] 0WIÈp ò90WIÈ

ÂL" Ä Å ' Å

½63<•\_V90?IÈ 9 j! &}9 7- @j0?IÈ Ö ;•Añ >f &È

È £Añ È £Añ Y+X ...B3 W ÈAñ > &È

È !" È Ç È£ &È @0û !" õ f &È

j0?I

!"F9 Ä \$Å

Ä Å F5 È

I Ä Å

Ä \$Å

Ä %Å

Ä &Å

Ä ' Å

İ1, xĐ Ä &Å

İ@ ÄĐ

5, : È!“.žF9N©j Ä Ǽ

Ä Å È È I Ä Å

Ä \$ Å Ä % Å

Ä & Å Ä ' Å

İ1,,xĐ Ä \$ Å

İ@ Ä Đ " E³ I

ø p

½" E³

!]

I È uF9 \$

Ä ÅÄî j Lf. Le È È I ,'(©±Ij ,'u 6 õ?±' & \_

Ä Å Ä \$ Å ^ X F6. Le È ^ Ç

Ä % Å ^ X F6. Le È ^ Ç

Ä & Å ^ X! " Ô. Le È ^ Ç

Ä ' Å ^ X F6. Le È ^ Ç

İ1,,xĐ Ä % Å

İ@ Ä Đ Ä c Ô « » κ %² UY+ ... " U " > ^ k... ±

Aî. Le È I4ï W é0;4ô @ , ' õ à j Ä Å

Ä \$ Å @ Ä % Å 9@  
Ä & Å 9 0§ J@ F @ Ä ' Å 9\_0@ F @  
İ1,,xĐ Ä ' Å @ T [, ' u?± ' & Ö3+ . Le0 > Î ¯. Le0 , ' £3+ f  
İ@ ÄĐ i žMŽU€!Q é0;4ô & È 9\_0@ x  
f & È 9 0§ J@ x  
f & È @ x

f F & È!" & é0;4ô @ x

f D & È İ ? F1° j

f & È È È!" & é0;4ô @ x  
f & È È!" & 9\_0@ Ä  
u1,,xF9 Ä ' Å

Aî Æ AGÿ4ô > 1y' Èì

, ' I93 \$ \_ Ä Å  
Ä \$ Å Ä % Å  
Ä & Å Ä ' Å  
İ1,,xĐ Ä & Å



İ@ ÅÐ

". > 1y'È I

f & È > AGy4ô1y' .- È u

f & È > AGy4ô1y' .- È u

u ÂL" x f È È u ÂL" È ¼\_B NÈF9

AîLç j Gÿ D > =-(£ È I Ä Å  
Ä \$Ä Ä %Ä Ä &Ä Ä ' Ä  
İ1,,xÐ Ä ' Ä

İ@ ÅÐ

+a . È , u , F9D.

AîLç j Gÿ ) 0û < 6 3 , ' 2). ö Ö I

í 2). f < ¾

Ä \$Ä Ä %Ä Ä &Ä Ä ' Ä  
İ1,,xÐ Ä %Ä

İ@ ÅÐ +aEËJÖV È ». , í 2). f < ¾

+a ¾ uF9 %

¼5\$Lç j Gÿ , ' 6,, 8 6 3 » j


--	--	--	--

". » & > » & -( Â) 0û È I

Ä \$ Å Ä % Å  
 Ä & Å Ä ' Å

İ1,, x Đ Ä % Å  
 İ@ Ä Đ

» & I

È

j » & ) 0û È p È £

È ø+a?ô93 W. È I Ç È p , 'Eé5H

6 3 » j


, 'Eé5H 6 3 » j


I

p

Â = ;0°NÎ Æ ENÎ " ENÎ < § <°

Ä Å \_\_\_\_\_ Ä

İ1,, x Đ

İ@ Ä Đ

È

È

p ï?

Ä Å \_\_\_\_\_

Ï1, x Ð

Ï@ Å Ð

Ä ÄAi È \_\_\_\_\_

Ï1, x Ð

Ï@ Å Ð

j~Oj , 'l- È j~Oj , 'w- È

Ä Å "r \_\_\_\_\_

Ï1, x Ð

Ï@ Å Ð

". \_ Lf. Le È 6 1\ >|>1\ >|Ä' È ½ 61\ G, ' = Ð `1\ G Ç. Le

È j , 'F6 È I

Ī1,,xĐ

Ī@ ÀĐ+aNÈ Aî

I È

£

È u

È

u

Aî jL¿ j » & D > Â=-(éÈ > Â=-(éÈ > -(Â) 0û

I

BBBBBB

Ī1,,xĐ

o→ † äo-

,; Þy=k

U

A ; , k ; , ,

U

±

? =@ 1ŠNÍ Æ7 22 ENÍ, § 70 < °@ 1Š Ê Ĩ 0 ½ •B\* D =A÷ DEý0A L%J1Í!›PÚ °  
 \NÈ% 6 6

Aî - \_ Þ 6 é0; ,'% Că , '@ È"r "4i ;'

\$@F 4i

Ī1,,xĐ ì\$@F 4i

Ī@ ÅĐ

6 • Ç È £

+a - @ À ? . È "4i"Ñ 9 ²-\$@F 4i x

ø+a ¾ È

"4i"Ñ 9"d £\$@F 4i x

ø È

È

u "4i 9 ì\$@F 4i

Ä Å \NÈ% 6 6

... } x ñ xGÿ 4+aCt \ Å •Gÿ [ ¼ ā Ø Å •Gÿ ā Ê È+O x - ÈK0 ^ ... '

> 4, ' £3+ 9 ... }Ct \ Å • ¼ ā Ø Å •, ' l 6 [j ¼ Èr Y#Ö 0

W &, ' xGÿ

Ī1,,xĐ

Ī@ ÅĐ

+a NÈ ? Ç Y #Ö - È F 1 ° Ç

+a / 6 [ ) [ ¼ \ " r • , l | j M & Ö

@ Ç

! " & Y # Ö 0 W È Y # Ö 0 W & , ' x G y

Ä Å \ N È % 6 6

". j ' j

È A Ñ 1 Ç

Ï 1 , x Ð

Ï @ Ä Ð A î j ' , M ' 0 j È

6 - \$ @ € 7 F j ± € 7 > È 9

p

(20) \NÈ% 6 6

"r4x , 'f< ú¼ -

İ1,,xĐ f<

İ@ ÀĐÄ ÄAî

È f< jL\$ j

f

f< È If< j

Ä2 Å

Aà

£ ¾ È f & È

f & È È

Aà È

I È

£ ¾ È f & È

f & È È

Aà È

I È

I

\NÈ% 6 6

". ¼!Q » È

Ä Å"r!" Ô ' F ¼!Q » j 7 ö » x

Ä ÅAñ >

Ï1, xĐ Ä Å È



Ä Å

İ@ ÅĐ

Ä Å

È

¼IQ ». Le j

È I(© ± é0; j

Ç(© ± I

f

& È

Ç

f

& È

Ç

6

!“ Ô ... } F Ç

Ç

È £

+a Ä Å.

È È u

u

f & È ` 0 ? I

p ^ XMŽM& AGÿ È £ ^ XMŽM& AGÿ È Ç ` 0 ? I ÇAñ

\NÈ% 6 6

Aî j•8 w I j , ' 7 6 3 k f , ' 1 ° ... L ç j g \ È j • 8 w

I j , ' 7 6 3 k f , ' 1 ° ... L ç j g \ È D T g \ - ( Â ) 0 ù È ! ] \_ Z . ò

È Y + X g \ È " r , ' 0 W I f ` A Ñ G ÿ È ! " r

İ1, x Đ

İ@ À Đ Ä Å + a N È ? Ç È È

I

Aî j , ' g \ ? ò I È I

f &

