

2021 研究生入学考试考研数学试卷 (数学三)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

- (A) 低阶无穷小 (B) 等价阶无穷小 (C) 高阶无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 连续且取得极大值 (B) 连续且取得极小值
(C) 可导且导数为零 (D) 可导且导数不为零

3. 函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

4. 设函数 $f(u, v)$ 可微且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

6. 设 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 为 4 阶正交矩阵, 若矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 表示任意常数, 则

线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x =$

- (A) $a_2 + a_3 + a_4 + ka_1$ (B) $a_1 + a_3 + a_4 + ka_2$
(C) $a_1 + a_2 + a_4 + ka_3$ (D) $a_1 + a_2 + a_3 + ka_4$

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为

对角矩阵, 则 P 、 Q 分别取

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$





(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$. 下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$

9. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本. 令

$$\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}. \text{ 则}$$

(A) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$ (B) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(C) $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$ (D) $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10. 总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体

X 的样本观察值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2 可得 θ 的最大似然估计值为

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

二、填空题: 11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 若 $y = \cos e^{-\sqrt{x}}, \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. $\int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 D 由 $y = \sqrt{x} \sin \pi x (0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 x 轴旋转的旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为_____

16. 甲乙中各装 2 红 2 白球, 从甲盆中任取一球, 观察颜色放入乙盆, 再从乙盆中任取一球, 令 X, Y 分别从甲乙两盆中取得红球的个数, 则 $\rho_{XY} =$ _____.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

17. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} [a \arctan \frac{1}{x} + (1+|x|)^{\frac{1}{x}}]$ 存在, 求 a 的值.

18. 求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.

19. 设有界区域 D 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分, 计算二重积分 $\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy$.

20. 设 n 为正整数, $y = y_n(x)$ 是微分方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 满足条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 的

解. (1) 求 $y_n(x)$; (2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值, 若 A 相似于对角矩阵. 求 a, b . 求逆矩阵

P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

22. 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的

长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 求 $E(\frac{X}{Y})$.





2021 考研数学试卷答案速查 (数学三)

一、选择题

- (1) C (2) D (3) A (4) C (5) B
 (6) D (7) C (8) D (9) B (10) A

二、填空题

- (11) $\frac{\sin e^{-1}}{2e}$ (12) 6 (13) $\frac{\pi}{4}$
 (14) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + c$ (15) -5 (16) $\frac{1}{5}$

三、解答题

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0^+} [a \arctan \frac{1}{x} + (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \frac{\pi}{2}a + e; \quad (3 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [a \arctan \frac{1}{x} + (1-x)^{\frac{1}{x}}] = -\frac{\pi}{2}a + e^{-1}; \quad (3 \text{ 分})$$

则其左极限等于右极限: $\frac{\pi}{2}a + e = -\frac{\pi}{2}a + e^{-1}$, 解得

$$a = \frac{e^{-1} - e}{\pi}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$(18) \text{ 令 } \begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{2x^2 + x - 1 - y^2}{x^3} = 0, \\ f'_y(x, y) = \frac{y}{x^2} = 0, \end{cases} \text{ 得驻点 } (-1, 0) \text{ 和 } (\frac{1}{2}, 0). \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = \frac{-2x^2 - 2x + 3 + 3y^2}{x^4}, \\ f''_{yx}(x, y) = -\frac{2y}{x^3}, \\ f''_{yy}(x, y) = \frac{1}{x^2}, \end{cases}$$

在 $(-1, 0)$ 处, $A = 3 > 0, B = 0, C = 1 > 0, AC - B^2 > 0$, 所以有

$$\text{极小值 } f(-1, 0) = 2; \quad (4 \text{ 分})$$

在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 处, $A = 24 > 0, B = 0, C = 4 > 0, AC - B^2 > 0$, 所以有

$$\text{极小值 } f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2} - 2 \ln 2. \quad (4 \text{ 分})$$



$$(19) \iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 e^{r^2+2r^2 \cos\theta \sin\theta} (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr \quad (4 \text{分})$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{r^2(1+\sin 2\theta)} r^3 \cos 2\theta d\theta \quad (4 \text{分})$$

$$= \int_0^1 \frac{r}{2} e^{r^2(1+\sin 2\theta)} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 r (e^{2r^2} - e^{r^2}) dr$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} e^{2r^2} - \frac{1}{2} e^{r^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} (e-1)^2 \quad (4 \text{分})$$

(20) (I) $xy' - (n+1)y = 0$, 化简得 $\frac{dy}{y} = (n+1) \frac{dx}{x}$, 两边积分, 得 $\ln|y| = (n+1) \ln|x| + C_0$,

化简得 $y = Cx^{n+1}$.

$$\because y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}, \therefore C = \frac{1}{n(n+1)}, \therefore y_n(x) = \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}. \quad (4 \text{分})$$

(II) 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}}{\frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}} \right| < 1$, 得 $-1 < x < 1$.

$x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛; $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛; 收敛域为 $[-1, 1]$. (4分)

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' dx - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' dx \\ &= x \int_0^x \frac{1}{1-x} dx - \int_0^x \frac{x}{1-x} dx \\ &= (1-x) \ln(1-x) + x \quad x \in [-1, 1) \end{aligned}$$

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x) \ln(1-x) + x] = 1$$

$$\therefore S(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x), & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}. \quad (4 \text{分})$$

(21) $|A - \lambda E| = (b - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$,



因为矩阵仅有两个不同的特征值, 故 $b=1$ 或 $b=3$.

当 $b=1$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$,

因为 A 相似与对角矩阵, 故 $r(A-E) = 1 \Rightarrow a=1$, (2分)

$$\text{解}(A-E)x=O \text{ 得 } a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{解}(A-3E)x=O \text{ 得 } a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}; \quad (4 \text{分})$$

当 $b=3$ 时, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$,

因为 A 相似与对角矩阵, 故 $r(A-E) = 1 \Rightarrow a=-1$, (2分)

$$\text{解}(A-E)x=O \text{ 得 } \beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{解}(A-3E)x=O \text{ 得 } \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}. \quad (4 \text{分})$$

(22) 易知 $X+Y=2, Y>X>0$, 且 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布;

$$(I) X \text{ 的概率密度 } f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (4 \text{分})$$

$$(II) Z \text{ 的分布函数 } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\};$$

$$z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = 0; z \geq 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_{\frac{2}{z+1}}^1 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$Z \text{ 的概率密度为 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (4 \text{分})$$

$$(III) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{2-x} - 1\right) dx$$



$$= -2 \ln |2-x| \Big|_0^1 - 1 = 2 \ln 2 - 1$$

(4分)

