# 2018 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则(　　)

(A) $a=\frac{1}{2},b=-1$.　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$.

(C) $a=\frac{1}{2},b=1$.　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$.

(2) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,则(　　)

(A) $a=3,b=1$.　　(B) $a=3,b=2$.

(C) $a=-3,b=1$.　　(D) $a=-3,b=2$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$,则(　　)

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,dx$,则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(6) $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)\,dy=$(　　)

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{5}{6}$.　　(C) $\frac{7}{3}$.　　(D) $\frac{7}{6}$.

(7) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.



考途
考路艰辛，征途有我

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

## 二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1) - \arctan x] =$ _____.

(10) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

(11) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x =$ _____.

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____.

(13) 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $\ln z + \mathrm{e}^{z-1} = xy$ 确定,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})} =$ _____.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为_____.

## 三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = ax^2$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1,求 $a$ 的值.



考途
考路艰辛，征途有我

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D$ 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 $x$ 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x + 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

已知常数 $k \geqslant \ln 2 - 1$. 证明：$(x - 1)(x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1) \geqslant 0$.

(19)(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在，求出最小值.

(20)(本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geqslant 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$. 设 $P$ 是 $L$ 上的动点，$S$ 是直线 $OA$ 与直线 $AP$ 及曲线 $L$ 所围图形的面积. 若 $P$ 运动到点 $(3,4)$ 时沿 $x$ 轴正向的速度是 4，求此时 $S$ 关于时间 $t$ 的变化率.



考途
考路艰辛，征途有我

(21)(本题满分 11 分)

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 $a$ 是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $a$ 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $a$；

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.



考途
考路艰辛，征途有我

# 2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题 解析

**一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

(A) $a=\frac{1}{2},b=-1$　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(C) $a=\frac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$

【答案】B

【解析】由已知有原极限等于 $\lim\limits_{x\to 0}[1+(e^x+ax^2+bx-1)]^{\frac{1}{e^x+ax^2+bx-1}\cdot\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2ax+b)=1+b=0$，即 $b=-1$，

则原极限等于 $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2a}{2}}=e^{\frac{1+2a}{2}}=1$，所以 $\frac{1+2a}{2}=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$.

（2）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】D

【解析】由导数定义可得：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$；

选项 A：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin|x|}{x}=0$；选项 B：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=0$；

选项 C：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$

选项 D：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$ 不存在，故选 D

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\le -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\ge 0\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 $R$ 上连续，则（　　）

(A) $a=3,b=1$　　(B) $a=3,b=2$　　(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-3,b=2$

【答案】D



考途
考路艰辛，征途有我

**【解析】** 由已知有 $f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, x\le -1\\ x-1, -1<x<0\\ x+1-b, x\ge 0\end{cases}$ 在 $R$ 上连续，

所以 $\lim\limits_{x\to -1^-}(1-ax)=1+a=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2\Rightarrow a=-3$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1-b)=1-b\Rightarrow b=2$.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

**【答案】** D

**【解析】** 取 $f(x)=x-\frac{1}{2}$ 或 $f(x)=\frac{1}{2}-x$，可排除选项 A、C；

由泰勒公式可得：$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2$，

当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)>f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$，

两边积分可得：$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left[f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})\right]dx=f(\frac{1}{2})$，故答案为 D.

（5）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$　(B) $M>K>N$　(C) $K>M>N$　(D) $K>N>M$

**【答案】** C

**【解析】** $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$；

因为 $e^x>1+x$，故 $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$；

又因为 $1+\sqrt{\cos x}>1$，所以 $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$，故 $K>M>N$，答案为 C.

（6）$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$（　　）



考途
考路艰辛，征途有我

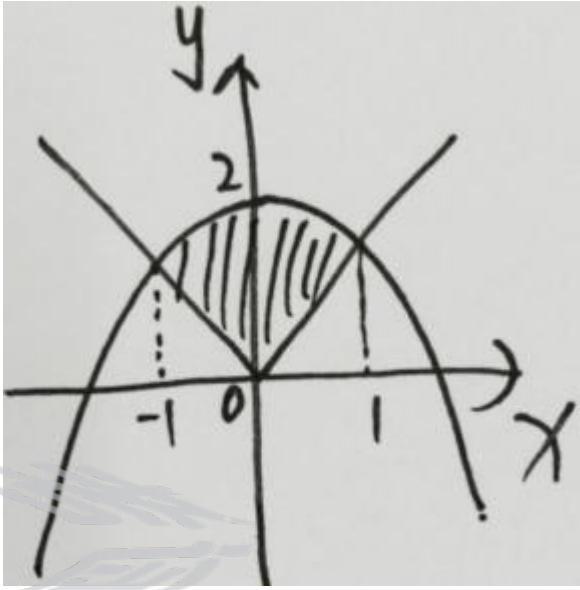
(A) $\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{6}$　　(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{7}{6}$

**【答案】**C

**【解析】**如图所示，由已知可得，积分区域

$D=\{(x,y)|-1\le x\le 0,-x\le y\le 2-x^2\}\cup\{(x,y)|0\le x\le 1,x\le y\le 2-x^2\}$，

显然被积函数 $xy$ 关于 $x$ 为奇函数，1关于 $x$ 为偶函数，




所以 $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy$

$=2\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}1dy=2\int_{0}^{1}(2-x^2-x)dx$

$=2(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{7}{3}$.

（7）下列矩阵中，与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为（　　）

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

**【答案】**A

**【解析】**令 $P=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

故 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，答案为 A.

（8）设 $A$、$B$ 为 $n$ 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 $X$ 的秩，$(X,Y)$ 表示分块矩阵，则（　　）

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$



考途
考路艰辛，征途有我

【答案】A

【解析】选项 C 明显错误；对于选项 B 举反例：$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$，则 $BA=\begin{pmatrix}0&0\\3&3\end{pmatrix}$，

而 $(A,BA)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&2\end{bmatrix}$，此时有 $r(A,BA)=2,r(A)=1$；

对于选项 D：举反例，$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，

则 $(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，$(A^T,B^T)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(A,B)=2,r(A^T,B^T)=1$

对于选项 A：$(A,AB)=A(E,B)$，因为 $r(E,B)=n$，故 $r(A)=r\left[A(E,B)\right]$，所以 $r(A,AB)=r(A)$

**二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.**

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$_____.

【答案】1

【解析】由拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi\in(x,x+1)$，使得 $\arctan(x+1)-\arctan x=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，

所以原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}=1$.

（10）曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

【答案】$y=4x-3$

【解析】对导可得 $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}$，令 $f''(x)=2-\dfrac{2}{x^2}=0$，有 $x=1$，故曲线的拐点为 $(1,1)$

而 $f'(1)=4$，所以其切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

（11）$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=$_____.

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=\dfrac{1}{2}\int_5^{+\infty}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1})dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_5^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.



考途
考路艰辛，征途有我

（12）曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点处的曲率为_____.

**【答案】** $\dfrac{2}{3}$

**【解析】** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\sec^2 t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$，

所以当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，$\dfrac{dy}{dx}=-1,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

故$k=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$.

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$_____.

**【答案】** $\dfrac{1}{4}$

**【解析】** 由已知可得当$x=2,y=\dfrac{1}{2}$时，$z=1$，

令$F(x,y,z)=\ln z+e^{z-1}-xy$，

则$F_x'=-y,F_z'=\dfrac{1}{z}+e^{z-1}$，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\dfrac{1}{z}+e^{z-1}},\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$.

（14）设$A$为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的向量组，若$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则$|A|=$_____.

**【答案】** 2

**【解析】** $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故令$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=P$，可得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，



考途
考路艰辛，征途有我

所以$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$.

**三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

**（15）（本题满分 10 分）**

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

**【答案】**原式$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^{2x}}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$

$$=\frac{1}{2}[e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(\sqrt{e^x-1})^3+\sqrt{e^x-1}]+C$$

**（16）（本题满分 10 分）**

已知连续函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（1）求$f(x)$；

（2）若$f(x)$在区间$[0,1]$上的平均值为 1，求$a$的值.

**【答案】**（1）$f(x)=2a(1-e^{-x})$；（2）$a=\frac{e}{2}$.

**【解析】**$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x(x-u)f(u)du=ax^2$

$\Rightarrow\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$

$\Rightarrow f(x)+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=2ax$

$\Rightarrow f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$，

令$F(x)=\int_0^x f(u)du$，则$F'(x)=f(x)$，$F(0)=0$，

所以有$F'(x)+F(x)=2ax$，

则$F(x)=e^{-\int dx}[\int 2axe^{\int dx}dx+C]=2ax-2a+Ce^{-x}$，

又由$F(0)=0$得$C=2a$，即$F(x)=2ax-2a+2ae^{-x}$，

故$f(x)=F'(x)=2a(1-e^{-x})$.

**（17）（本题满分 10 分）**



考途
考路艰辛，征途有我

设平面区域$D$由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$（$0\le t\le 2\pi$）与$x$轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$.

**【答案】**$3\pi^2+5\pi$.

**【解析】**由题目积分区域，原积分可化为

$$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\varphi(x)}(x+2y)dy=\int_0^{2\pi}[x\varphi(x)+\varphi^2(x)]dx,$$

令$x=t-\sin t, y=1-\cos t$换元可得，

$$原式=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2]d(t-\sin t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=3\pi^2+5\pi.$$

**（18）（本题满分 10 分）**

已知常数$k\ge \ln 2-1$.证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$，$x>0$.

**【提示】**单调性

**【解析】**①当$0<x<1$时，有$x-1<0$，只需证$x-\ln^2 x+2k\ln x-1\le 0$即可，

令$f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，所以$f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}, 0<x<1$，

再令$g(x)=x-2\ln x+2k, 0<x<1$，则$g'(x)=1-\dfrac{2}{x}<0$，

所以$g(x)$单调递减，则$g(x)>g(1)=1+2k\ge 1+2(\ln 2-1)=2\ln 2-1>0$，

故$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故$f(x)\le f(1)=0$，结论成立；

② 当$x=1$时，结论显然成立；

③ 当$x>1$时，有$x-1>0$，只需证$x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ge 0$即可，

令$f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，所以$f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}, x>1$，

再令$g(x)=x-2\ln x+2k, x>1$，则$g'(x)=1-\dfrac{2}{x}\begin{cases} <0, 1<x<2 \\ >0, x>2 \end{cases}$，

所以$g(x)\ge g(2)=2-2\ln 2+2k\ge 2-2\ln 2+2(\ln 2-1)=0$，

故$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故$f(x)\ge f(1)=0$，结论成立；

综上①②③，结论得证.

**（19）（本题满分 10 分）**

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，问：三个图形的面积和是否存在最小值？若存在，求出最小值.



考途
考路艰辛，征途有我

【答案】$S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

【解析】设圆、正三角形、正方形的总长度分别为$x,y,z$，则有$x+y+z=2$，且此时圆的半径为$\dfrac{x}{2\pi}$，正三角形边长为$\dfrac{y}{3}$，正方形边长为$\dfrac{z}{4}$.

此时三个图形的总面积为$S=\pi(\dfrac{x}{2\pi})^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\dfrac{y}{3})^2+(\dfrac{z}{4})^2=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}$

下求$S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}$在条件$x+y+z=2$下的最小值，

构造拉格朗日函数$F=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$

$$\begin{cases}F_x'=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ F_y'=\dfrac{y}{6\sqrt{3}}+\lambda=0\\ F_z'=\dfrac{z}{8}+\lambda=0\\ F_\lambda'=x+y+z=0\end{cases}，解得\begin{cases}x=\dfrac{4\pi}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{12\sqrt{3}}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{16}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\end{cases}，$$

则由实际问题的背景可知：$S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

**（20）（本题满分 11 分）**

已知曲线$L:y=\dfrac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点$O(0,0)$，点$A(0,1)$.设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围成图形的面积.若$P$运动到点$(3,4)$时沿$x$轴正向的速度是 4，求此时$S$关于时间$t$的变化率.

【答案】10.

【解析】这在$t$时刻，$P$点坐标为$(x(t),\dfrac{4}{9}x^2(t))$，则

$$S(t)=\frac{1}{2}[1+\frac{4}{9}x^2(t)]x(t)-\int_0^{x(t)}\frac{4}{9}u^2du=\frac{x(t)}{2}+\frac{2}{27}x^3(t)，$$

所以$S'(t)=\dfrac{1}{2}x'(t)+\dfrac{2}{9}x^2(t)x'(t)$，

由题可知$x(t)=3$时，$x'(t)=4$，代入可得$S'(t)\big|_{x=3}=10$.

**（21）（本题满分 11 分）**

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.



考途
考路艰辛，征途有我

【答案】提示：利用单调有界定理证明收敛；

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

【解析】先证$\{x_n\}$有下界0，

已知$x_1>0$，假设$x_k>0$，由$x>0$时，有$e^x-1>x>0$，可得：$x_{k+1}=\ln\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}>\ln 1=0$，

故数列$\{x_n\}$有下界 0；

而$e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-e^0}{x_n}=e^{\xi}(0<\xi<x_n)$

所以$x_{n+1}=\xi<x_n$，即数列$\{x_n\}$单调递减，故数列$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对等式$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$两边取极限可得：$Ae^A=e^A-1$，解得：$A=0$.

**（22）（本题满分 11 分）**

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数.

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

【答案】（1）当$a=2$时，$x=k(2,1,-1)^T,k\in R$；

当$a\neq 2$时，$x_1=x_2=x_3=0$

（2）当$a=2$时，规范形为$y_1^2+y_2^2+y_3^2$；

当$a\neq 2$时，规范形为$y_1^2+y_2^2$

【解析】（1）由$f(x_1,x_2,x_3)=0$可得$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$，

则系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$得：

当$a\neq 2$时，$r(A)=3$，此时只有零解即$x_1=x_2=x_3=0$，

当$a=2$时，$r(A)=2$，此时方程有无穷多解，且通解为$x=k(2,1,-1)^T,k\in R$；

（2）由（1）知，当$a\neq 2$时，$A$可逆，



考途
考路艰辛，征途有我

令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + ax_3 \end{cases}$，即$Y = AX$，则规范形为$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$，

当$a = 2$时，$r(A) = 2$，

此时解$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$得特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 0$，

所以正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，此时规范形为$y_1^2 + y_2^2$.

**（23）（本题满分 11 分）**

已知$a$是常数，且矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求$a$；

（2）求满足$AP = B$的可逆矩阵$P$.

**【答案】**（1）$a = 2$

（2）$P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，其中$k_1, k_2, k_3$为实数，且$k_2 \neq k_3$.

**【解析】**（1）由已知有$r(A) = r(B)$，

而$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$，

所以$2 - a = 0$，即$a = 2$；

（2）$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以方程$AX = B$的解$X = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，



考途
考路艰辛，征途有我

且当$|X|\neq 0$即$k_2\neq k_3$时，$X$可逆，

则取$P=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数，且$k_2\neq k_3$，即为所求.



考途
考路艰辛，征途有我