2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

(1) 当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$ (　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(2) 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<2\pi\right)$ 的拐点坐标为(　　)

(A) $(0,2)$.　　(B) $(\pi,-2)$.　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　(D) $\left(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(3) 下列反常积分发散的是(　　)

(A) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.　　(C) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(4) 已知微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$，则 a、b、c 依次为(　　)

(A) 1，0，1.　　(B) 1，0，2.　　(C) 2，1，3.　　(D) 2，1，4.

(5) 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则(　　)

(A) $I_3<I_2<I_1$.　　(B) $I_2<I_1<I_3$.

(C) $I_1<I_2<I_3$.　　(D) $I_2<I_3<I_1$.

(6) 已知 $f(x)$，$g(x)$ 2 阶可导且 2 阶导函数在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等的(　　)

(A) 充分非必要条件.　　(B) 充分必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ (　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为(　　)

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$ ______.

(10) 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为______.

(11) 设函数 $f(u)$ 可导, $z=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

(12) 曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为______.

(13) 已知函数 $f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ______.

(14) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 (i,j) 元的代数余子式, 则 $A_{11}-A_{12}=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid |x| \leqslant y, (x^2 + y^2)^3 \leqslant y^4\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

设 n 为正整数,记 S_n 为曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x (0 \leqslant x \leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积,求 S_n,并求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

(20)(本题满分 11 分)

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,求 a,b 的值,使得在变换 $u(x,y) = v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 下,上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

(21)（本题满分 11 分）

已知函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，证明：

（Ⅰ）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

(22)（本题满分 11 分）

已知向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$与 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价，求 a 的取值，并将$\boldsymbol{\beta}_3$ 用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)（本题满分 11 分）

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似.

（Ⅰ）求 x,y；

（Ⅱ）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.