2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 a 等于(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则(　　)

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, $\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3}$, $\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3}$, $\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$.若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f(g(x))$ 在 x_0 处取极大值的一个充分条件是(　　)

(A) $f'(a)<0$.　　(B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$.　　(D) $f''(a)>0$.

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x$, $g(x)=x$, $h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　)

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示.下列命题正确的是(　　)

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=($　　$)$

(A) 0.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.　　(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足(　　)

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.)

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______.

(10) 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为______.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ______.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $E(T)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内存在二阶导数,且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(Ⅰ)证明存在 $\eta\in(0,2)$,使 $f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f''(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$,正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵,若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$,求 a,$\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分 11 分)

箱中装有6个球,其中红、白、黑球的个数分别为1,2,3个.现从箱中随机地取出2个球,记X为取出的红球个数,Y为取出的白球个数.

(Ⅰ)求随机变量(X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x\left(1-ax\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x+axe^x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}+\frac{axe^x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{axe^x}{x}=-1+a=1$$

所以 $a=2$.

(2) 【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解, 故 $\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)'+P(x)\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)=0$, 所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x), y_2'+P(x)y_2=q(x)$, 所以

$$\left(\lambda-\mu\right)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x)\neq 0$, 所以 $\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解, 所以

$$\left(\lambda y_1+\mu y_2\right)'+P(x)\left(\lambda y_1+\mu y_2\right)=q(x),$$

整理得 $$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即 $\left(\lambda+\mu\right)q(x)=q(x)$, 由 $q(x)\neq 0$ 可知 $\lambda+\mu=1$, ②

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$, 故应选(A).

(3)【答案】 (B).

【解析】$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'=f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$,

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}''=\left\{f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)\right\}'=f''\left[g(x)\right]\cdot\left[g'(x)\right]^2+f'\left[g(x)\right]\cdot g''(x)$$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值, 所以 $g'(x_0)=0$. 所以

$$\left\{f\left[g(x_0)\right]\right\}'' = f'\left[g(x_0)\right]\cdot g''(x_0) = f'\left(a\right)\cdot g''(x_0)$$

由于 $g''(x_0) < 0$，要使 $\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'' < 0$，必须有 $f'(a) > 0$，故答案为 B.

(4)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{10}}\dfrac{1}{10} = +\infty$，所以，当 x 充分大时，$h(x) > g(x)$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10} x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 10\dfrac{\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 10\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^9 x}{x}$

$$= 10\cdot 9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8 x\cdot\frac{1}{x}}{1} = \cdots = 10\cdot 9\cdots 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 .$$

所以当 x 充分大时，$f(x) < g(x)$，故当 x 充分大，$f(x) < g(x) < h(x)$.

(5)【答案】(A).

【解析】由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示，所以 $r(\mathrm{I}) \le r(\mathrm{II})$，即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r) \le r(\beta_1,\cdots,\beta_s) \le s$$

若向量组 I 线性无关，则 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r) = r$，所以 $r = r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r) \le r(\beta_1,\cdots,\beta_s) \le s$，即 $r \le s$，选(A).

(6)【答案】(D).

【解析】设 λ 为 A 的特征值，由于 $A^2 + A = O$，所以 $\lambda^2 + \lambda = 0$，即 $(\lambda+1)\lambda = 0$，这样 A 的特征值只能为 -1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 $A \quad \Lambda$，$r(A) = r(\Lambda) = 3$，因此，$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，即 $A \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7)【答案】(C).

【解析】离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数，连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式，得到随机变量 X 既不是离散型随机变量，也不是连续型随机变量，所以求随机变量在一点处的概率，只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义，函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差，即

$P\left\{X = 1\right\} = P\left\{X \le 1\right\} - P\left\{X < 1\right\} = F\left(1\right) - F\left(1-0\right) = 1 - e^{-1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}e^{-1}$，故本题选(C).

(8)【答案】(A).

【解析】根据题意知，$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$（$-\infty<x<+\infty$），$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

利用概率密度的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，故

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$

所以整理得到$2a+3b=4$，故本题应选(A).

二、**填空题**

(9)【答案】-1.

【解析】$\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=x\int_0^x\sin t^2dt$，令$x=0$，得$y=0$，等式两端对$x$求导：

$$e^{-(x+y)^2}(1+\frac{dy}{dx})=\int_0^x\sin t^2dt+x\sin x^2\ .$$

将$x=0$，$y=0$代入上式，得$1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$．所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$.

(10)【答案】$\frac{\pi^2}{4}$.

【解析】根据绕x轴旋转公式，有

$$V=\int_e^{+\infty}\pi y^2dx=\int_e^{+\infty}\pi\frac{dx}{x\left(1+\ln^2x\right)}$$

$$=\pi\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{1+\ln^2x}=\pi\cdot\left[\arctan(\ln x)\right]_e^{+\infty}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

(11)【答案】$p\cdot e^{\frac{1}{3}\left(P^3-1\right)}$.

【解析】由弹性的定义，得$\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}=1+p^3$，所以$\frac{dR}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)dp$，即$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^2+C$，

又$R(1)=1$，所以$C=-\frac{1}{3}$．故$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}$，因此$R=p\cdot e^{\frac{1}{3}\left(p^3-1\right)}$.

(12)【答案】$b=3$.

【解析】函数为$y=x^3+ax^2+bx+1$，它的一阶导数为$y'=3x^2+2ax+b$; 二阶导数为$y''=6x+2a$，又因为$(-1,0)$是拐点，所以$\left.y''\right|_{x=-1}=0$，得$-\frac{a}{3}=-1$，所以$a=3$，又因为曲线过点$(-1,0)$，所以将$x=-1,y=0$代入曲线方程，得$b=3$.

(13) 【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $|B|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=|B|^{-1}=\frac{1}{2}$，因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

(14)【答案】$\sigma^2+\mu^2$.

【解析】$E(T)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}nE\left(X^2\right)=E\left(X^2\right)=\sigma^2+\mu^2$.

三、解答题

(15)【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}}$

其中

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)^{-1}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}(\frac{1}{\ln x}-1)=-1.$$

故原式 $=e^{-1}$.

(16)【解析】积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1,\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\middle|-1\le y\le 0,-\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$\iint\limits_D(x+y)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)dxdy$

因为区域 D 关于 x 轴对称，被积函数 $3x^2y+y^3$ 是 y 的奇函数，所以 $\iint\limits_D\left(3x^2y+y^3\right)dxdy=0$.

$$\iint\limits_D(x+y)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\iint\limits_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\left[\int_0^1dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)dx\right]$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}dy=2\int_0^1\left(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4}\right)dy=\frac{14}{15}.$$

(17)【解析】令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$，用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} F_x' = y + 2\lambda x = 0, \\ F_y' = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F_z' = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

求解得六个点： $A\left(1,\sqrt{5},2\right), B\left(-1,-\sqrt{5},-2\right)$,

$C\left(1,-\sqrt{5},2\right), D\left(-1,\sqrt{5},-2\right)$,

$E\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right), F\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$.

由于在点 A 与 B 点处, $u = 5\sqrt{5}$；在点 C 与 D 处, $u = -5\sqrt{5}$；在点 E 与 F 处, $u = 0$.

又因为该问题必存在最值, 并且不可能在其它点处, 所以 $u_{\max} = 5\sqrt{5}$, $u_{\min} = -5\sqrt{5}$.

(18) 【解析】 (I) 当 $0 < x < 1$ 时 $0 < \ln(1+x) < x$, 故 $\left[\ln(1+t)\right]^n < t^n$, 所以

$$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n < \left|\ln t\right| t^n ,$$

则
$$\int_0^1 \left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt < \int_0^1 \left|\ln t\right| t^n dt \ \left(n = 1,2,\cdots\right).$$

(II) $\int_0^1 \left|\ln t\right| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d\left(t^{n+1}\right) = \frac{1}{\left(n+1\right)^2}$, 故由

$$0 < u_n < \int_0^1 \left|\ln t\right| t^n dt = \frac{1}{\left(n+1\right)^2},$$

根据夹逼定理得 $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(n+1\right)^2} = 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(19)【解析】(I) 因为 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$, 又因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续, 所以由积分中值定理得, 至少有一点 $\eta \in \left[0,2\right]$, 使得

$$\int_0^2 f\left(x\right)dx = f\left(\eta\right)\cdot\left(2-0\right)$$

即 $2f\left(0\right) = 2f\left(\eta\right)$, 所以存在 $\eta \in \left[0,2\right]$, 使得 $f\left(\eta\right) = f\left(0\right)$.

(II) 因为 $f\left(2\right) + f\left(3\right) = 2f\left(0\right)$, 即 $\frac{f\left(2\right) + f\left(3\right)}{2} = f\left(0\right)$, 又因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[2,3\right]$ 上连续, 由介值定理知, 至少存在一点 $\eta_1 \in \left[2,3\right]$ 使得 $f\left(\eta_1\right) = f\left(0\right)$.

因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续, 在 $\left[0,2\right]$ 上可导, 且 $f\left(0\right) = f\left(2\right)$, 所以由罗尔中值定

理知, C 存在 $\xi_1 \in (0,2)$, 有 $f'(\xi_1)=0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[2,\eta_1]$ 上连续, 在 $(2,\eta_1)$ 上可导, 且 $f(2)=f(0)=f(\eta_1)$, 所以由罗尔中值定理知, 存在 $\xi_2 \in (2,\eta_1)$, 有 $f(\xi_2)=0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上二阶可导, 且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 所以由罗尔中值定理, 至少有一点 $Ax=b\subset(0,3)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1：(Ⅰ)已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, 此时, $r(A)\neq r(\overline{A})$, 故 $Ax=b$ 无解(舍去).

当 $\lambda=-1$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$, 由于 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 所以 $a=-2$, 故 $\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 因此 $|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(\overline{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\overline{A})$, 得 $a=-2$.

(Ⅱ) 对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此$Ax=b$的通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, 其中$k$为任意常数.

(21) 【解析】由于$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$, 存在正交矩阵$Q$, 使得$Q^TAQ$为对角阵, 且$Q$的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, 故$A$对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义, 有$A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, 由此可得$a=-1,\lambda_1=2$. 故$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$,

可得A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

由 $(\lambda_2 E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}-4 & 1 & -4\\ 1 & -7 & 1\\ -4 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_2=-4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3 E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵, ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量, 所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x,y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参数, A 要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi\text{，即 }A=\pi^{-1},$$

故 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

当 $-\infty<x<+\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

(23)【解析】(I) X 的所有可能取值为 $0,1$，Y 的所有可能取值为 $0,1,2$.

$P\{X=0,Y=0\}=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，其中 $X=0,Y=0$ 表示取到的两个球都是黑球；

$P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$，其中 $X=0,Y=1$ 表示取到的一个是白球，一个是黑球；

$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，其中 $X=0,Y=2$ 表示取到的两个球都是白球；

$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，其中 $X=1,Y=0$ 表示取到的一个是红球，一个是黑球；

$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$，其中 $X=1,Y=1$ 表示取到的一个是红球，一个是白球；

$P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{0}{C_6^2}=0$，

因此二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

(II) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，

$E(XY)=1\times1\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{15}$，$E(X)=0\times\dfrac{2}{3}+1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，

$E(Y)=0\times\dfrac{2}{5}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{3}$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{4}{45}$.