湖南师范大学 2021—2022 学年第二学期 2021 年级

数统院各专业期中课程

高等代数（二） 考核试题

课程代码：07031004　考核方式：闭卷　考试时量：120 分钟　试卷类型：D

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分	合分人	复查人
应得分	18	15	21	18	16	12	100		
得 分									

得分	评卷人	复查人

一、判断题（下列各题，你认为正确的，请在题干的括号内打“√”，错的打“×”。本题共 9 小题，每题 2 分，共 18 分）

1、两个复对称矩阵合同当且仅当它们有相同的秩。【　】

2、若对称矩阵 A 是正定的，那么 A 的所有主子式都大于零。【　】

3、线性空间的任何两个非零子空间的并集都不是子空间。【　】

4、若 V 为全体多项式线性空间，那么 V 中所有次数小于 n 的多项式组成 V 的一个 n 维子空间。【　】

5、给出 3 维线性空间 V 的三个 1 维子空间 V_1、V_2、V_3，且其中任意两个的交都为 0，则有 $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$。【　】

6、如果线性空间 V 的线性变换 A 的特征向量是线性空间 V 中所有的非零向量，那么 A 是数乘线性变换。【　】

7、如果矩阵 A 是可逆矩阵，那么矩阵 ABAB 与 BABA 相似。【　】

8、线性空间 V 的子空间 W、U 相等的充要条件是它们的维数相等。【　】

9、如果矩阵 A 是不可逆矩阵，那么矩阵 A 的特征值中一定有零特征值。【　】

得分	评卷人	复查人

二、单选题（在本小题的备选答案中，只有一个是正确的，请把正确答案的题号填入题干括号内，多选不给分。本题共 5 小题，每题 3 分，共 15 分）

1、将四元实二次型按合同分类，一共可以分为几类？【　】

① 4，　② 5，　③ 10，　④ 15

2、设线性空间 V 由数域 P 上全体 n 阶矩阵按照矩阵的加法和数乘法组成。下面 V 的哪一个子集合不能作成 V 的子空间？【　】

① 全体对称矩阵，　② 全体退化矩阵，

③ 全体迹为 0 的矩阵，　④ 全体上三角矩阵。

3、下列关于基底之间的过渡矩阵的诸断言中，哪一条是不正确的。【　】

① 过渡矩阵可以有特征值为零，　② 过渡矩阵可以是对称矩阵，

③ 过渡矩阵可以是下三角矩阵，　④ 过渡矩阵可以是初等矩阵。

学院＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 任课教师＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 性别＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

4、下列线性空间之间的各个映射中，哪一个是 P^3 的线性变换。【 】

① $A(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,2x_3,3)$ ② $A(x_1,x_2,x_3)=(0,0,x_1)$

③ $A(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2+1,x_3)$ ④ $A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2,-x_2)$

5、设 A 及 B 都是线性变换，且 E 是单位变换，下列哪一条命题正确。【 】

① 如果 AB=E，则 BA=E， ② 恒有 $AB-BA\neq E$，

③ 恒有 $A(BA)^2=(AB)^2A$， ④ 恒有 $(AB)(BA)=(BA)(AB)$。

得分	评卷人	复查人

三、填空题（本题共 7 个空，每空 3 分，共 21 分）

1、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2-2x_2x_3+3x_2x_4$ 的规范形

是 ________________。

2、设线性空间 V 有非零真子空间，且 V 的任意两个非零真子空间 V_1、V_2，要么交 $V_1\cap V_2=0$，要么相等 $V_1=V_2$，则线性空间 V 的维数 $\dim V=$ ______。

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}$，则实二次型 $f=X^TA^TX$ 的秩是 ______。

4、复数域 $\mathbb{C}$ 作为实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间，它的维数是 $\dim\mathbb{C}=$ ______。

5、设 A 是多项式线性空间 $P[x]_3$ 的线性变换：$\forall f(x)\in P[x]_3: A(f(x))=xf'(x)$，则 A 在基

底 $1,\ 2x,\ 3x^2$ 下的矩阵是 ________________。

6、设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\s&t\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 t 的取值范围是 ________________。

7、矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$ 的全体特征值是 ________________。

得分	评卷人	复查人

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

1、化三元二次型 $4x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3$ 为标准形，并给出你所用的非退化线性替换。（背面留有此题答题空白）

2、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，以及 $C(A)=\{X\in P^{2\times 2}|XA=AX\}$，即全体与 A 可交换的矩阵做成的子空间，试求出 $C(A)$ 的一个基底和它的维数。

得分	评卷人	复查人

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1、设 W 是数组向量空间 P^n 的一个非零子空间，且 W 中的任一向量，其分量或者全为 0，或者全非 0。证明：W 的维数为 1.

2、设A,B都是线性空间V的线性变换，且

$$A^2 = A,\quad B^2 = B,\quad (A+B)^2 = (A+B)。$$

证明：$AB = 0$。

得分	评卷人	复查人

六、简答题（本题共2小题，每小题6分，共12分）

1、陈述第五章的“惯性定理”，并谈谈你对此定理的理解。

2、设V是数域P上的n维线性空间，W是V的非平凡子空间。是否存在若干个V的$n-1$维子空间$V_1, V_2, \cdots, V_s$，使

$$W = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s\ ？$$

如果是，请简单说明理由；如果不是，请举反例。