

2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有()
- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$. (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.
- (2) 下列曲线中有渐近线的是()
- (A) $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$. (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$. (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.
- (3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量, 则下列选项中错误的是()
- (A) $a = 0$. (B) $b = 1$. (C) $c = 0$. (D) $d = \frac{1}{6}$.
- (4) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上()
- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
- (5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = ()$
- (A) $(ad - bc)^2$. (B) $-(ad - bc)^2$. (C) $a^2d^2 - b^2c^2$. (D) $b^2c^2 - a^2d^2$.
- (6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的()
- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.
- (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) = ()$
- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.
- (8) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布为()
- (A) $F(1, 1)$. (B) $F(2, 1)$. (C) $t(1)$. (D) $t(2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

- (9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$ (P 为商品的价格), 则该商品的边际收益为_____.
- (10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ _____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是 _____.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

三、解答题 (本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y) e^x.$$

若 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 的所有矩阵 \mathbf{B} .

(21) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服

从均匀分布 $U(0, i)$ ($i=1, 2$).

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}, P\{X=1\} = \frac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的

相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(I) 求 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$.