2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有(　　)

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y = x + \sin x$.　(B) $y = x^2 + \sin x$.　(C) $y = x + \sin \dfrac{1}{x}$.　(D) $y = x^2 + \sin \dfrac{1}{x}$.

(3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.当 $x \to 0$ 时,若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量,则下列选项中错误的是(　　)

(A) $a = 0$.　(B) $b = 1$.　(C) $c = 0$.　(D) $d = \dfrac{1}{6}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上(　　)

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$.　(B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$.　(D) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　)

(A) $(ad - bc)^2$.　(B) $-(ad - bc)^2$.　(C) $a^2d^2 - b^2c^2$.　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　)

(A) 必要非充分条件.　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　(D) 既非充分也非必要条件.

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B) = 0.5$, $P(A - B) = 0.3$,则 $P(B - A) =$ (　　)

(A) 0.1.　(B) 0.2.　(C) 0.3.　(D) 0.4.

(8) 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则统计量 $S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为(　　)

(A) $F(1,1)$.　(B) $F(2,1)$.　(C) $t(1)$.　(D) $t(2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$(P 为商品的价格),则该商品的边际收益为______.

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域,则 D 的面积为______.

(11) 设$\int_0^a xe^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$,则 $a =$ ______.

(12) 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)\mathrm{d}x =$ ______.

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是______.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $E\left(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \theta^2$,则 $c =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x,y)\mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$,计算$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x.$$

若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$.证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a,\ x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$.在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅰ)求(X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

2014 年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) A

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,

有$|a_n-a|<\varepsilon$,即 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$,则 $|a|-\varepsilon<|a_n|\leqslant|a|+\varepsilon$,

取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,则知$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.故应选 A.

(2) C

解 由渐近线定义可知,四个选项的曲线均不存在水平渐近线和垂直渐近线.

对于 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$,可知 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0.$$

所以 $y=x$ 是 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 的斜渐近线.故应选 C.

(3) D

解 因为 $p(x)-\tan x=a+bx+cx^2+dx^3-\tan x$ 是无穷小($x\to 0$ 时),

所以 $a=0$.

又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{p(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{b+2cx-\sec^2x}{3x^2}+d\right)$.

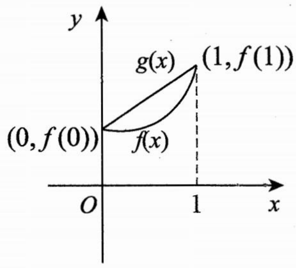
所以 $b=1$,原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2c}{3x}-\dfrac{1}{3}+d\right)=0$,则 $c=0,d=\dfrac{1}{3}$. 故应选 D.

(4) D

解 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 是凹函数.

而 $g(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$ 可视为连接$(0,f(0))$与$(1,f(1))$的直线段,如右图所示,则 $f(x)\leqslant g(x)$.

故应选 D.



(5) B

解 由行列式展开定理按第一列展开:

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)=-(ad-bc)^2.$$ 故应选 B.

(6) A

解 因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$.

对任意的常数 k,l,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩都为 2,

所以若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 一定线性无关.

而当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时,

对任意的常数 k,l,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.故应选 A.

(7) B

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-0.5P(A)$

$$=0.5P(A)\overset{令}{=\!=}0.3,$$

得 $P(A)=0.6$,

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.2$. 故应选 B.

(8) C

解 因为 $X_i\sim N(0,\sigma^2),i=1,2,3$,所以 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$,则

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1),$$

又 $\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$,则 $\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$.由 t 分布定义,知

$$\frac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2}}=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}\sim t(1).\quad 故应选 C.$$

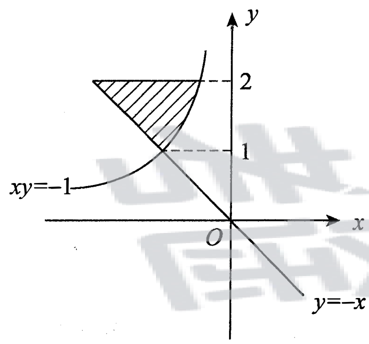
二、填空题

(9) $20-\boldsymbol{Q}$

解 收益函数 $R(\boldsymbol{Q})=P\boldsymbol{Q}=20\boldsymbol{Q}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{Q}^2$,所以边际收益为 $R'(\boldsymbol{Q})=20-\boldsymbol{Q}$.

(10) $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

解 区域 D 的图形如右图所示,面积



$$S=\int_1^2\left[-\frac{1}{y}-(-y)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}-\ln y\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

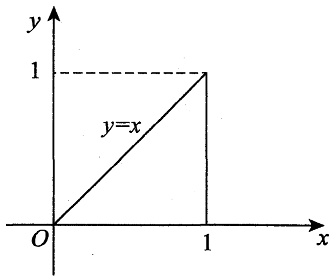
(11) $\dfrac{1}{2}$

解 由于 $\displaystyle\int_0^a x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x-1)\Big|_0^a=\frac{\mathrm{e}^{2a}}{4}(2a-1)+\frac{1}{4}\overset{令}{=\!=}\frac{1}{4}$,

得 $a=\dfrac{1}{2}$.

(12) $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$

解　如右图所示，则



$$\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 e^{y^2}(1-y)dy$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}dy+\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1).$$

(13) $[-2,2]$

解　由配方法可知

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2.$$

由于负惯性指数为 1，则 $4-a^2\geqslant 0$，所以 a 的取值范围是$[-2,2]$.

(14) $\frac{2}{5n}$

解　$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_\theta^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}dx=\frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3dx=\frac{5}{2}\theta^2$，则

$$E\left(c\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=c\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=c\sum_{i=1}^n E(X^2)=cn\cdot\frac{5}{2}\theta^2\xlongequal{\text{令}}\theta^2.$$

所以 $c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15) **解**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

(16) **解**

$$\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot\int_1^2 r\sin\pi r\,dr.$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^2 r\sin\pi r\,dr=\frac{1}{\pi}\left(-r\cos\pi r+\frac{1}{\pi}\sin\pi r\right)\Big|_1^2=-\frac{3}{\pi},$$

故$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{3}{4}$.

(17) **解** 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x\cos y,\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x\sin y$,

所以 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$ 化为

$$f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x=[4f(\mathrm{e}^x\cos y)+\mathrm{e}^x\cos y]\mathrm{e}^x.$$

即函数 $f(u)$ 满足方程

$$f'(u)-4f(u)=u,$$

该方程的通解为

$$f(u)=C\mathrm{e}^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}.$$

又 $f(0)=0$,得 $C=\frac{1}{16}$,

故 $f(u)=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4u}-4u-1)$.

(18) **解** 幂级数的系数 $a_n=(n+1)(n+3)$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$,所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,因级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)(-1)^n$ 发散,

故收敛域为$(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n,x\in(-1,1)$,

则$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$,

其中$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$,

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+2)t^{n+1}\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$,

所以 $S(x)=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3},x\in(-1,1)$.

(19) **证** (Ⅰ) 因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$,

所以当 $x\in[a,b]$ 时,有$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$,

即 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$.

(Ⅱ) 令 $F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$.

因为 $f(x),g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,

所以 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上可导,且

$$F'(x)=\left[f\left(a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\right)-f(x)\right]g(x).$$

由(Ⅰ)知，$a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u \leqslant x$，

又因为 $f(x)$ 单调增加，且 $g(x)\geqslant 0$，

所以 $F'(x)\leqslant 0$，从而 $F(x)$ 在区间$[a,b]$上单调减少.

又 $F(a)=0$，故 $F(b)\leqslant 0$，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(20) **解** (Ⅰ) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix},$$

则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 对矩阵$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})$施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，则

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+k_1\boldsymbol{\alpha}$， k_1 为任意常数；

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -4\\ 0\end{pmatrix}+k_2\boldsymbol{\alpha}$， k_2 为任意常数；

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_3\boldsymbol{\alpha}$， k_3 为任意常数.

于是，所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha}),\quad k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数.}$$

(21) **证** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$.

因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1=n,\lambda_2=0(n-1$ 重).

由于 A 为实对称矩阵,所以 A 相似于对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $r(\lambda_2 E-B)=\mathrm{r}(B)=1$,

所以 B 对应于特征值 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,

于是 B 也相似于 Λ.

故 A 与 B 相似.

(22) 解 (Ⅰ) $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$

$$=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}.$$

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $0\leqslant y<1$ 时,$F_Y(y)=\frac{3y}{4}$;

当 $1\leqslant y<2$ 时,$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{y}{4}$;

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

(Ⅱ) 随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2\frac{1}{4}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

(23) **解** (Ⅰ) 设(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	a	b
1	c	d

由题设条件知

$EX=EY=\frac{2}{3}, DX=DY=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$.

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9}$.

由

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}.$$

解得

$d=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

由此可得

$$c=b=\frac{2}{3}-d=\frac{1}{9},\ a=\frac{1}{3}-b=\frac{2}{9}.$$

所以(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(Ⅱ) $P\{X+Y\leqslant 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{9}$.