

# 2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,函数  $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  是等价无穷小量,则( )  
(A)  $k = 1, c = 4$ . (B)  $k = 1, c = -4$ . (C)  $k = 3, c = 4$ . (D)  $k = 3, c = -4$ .
- (2) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导,且  $f(0) = 0$ ,则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$  ( )  
(A)  $-2f'(0)$ . (B)  $-f'(0)$ . (C)  $f'(0)$ . (D) 0.
- (3) 设  $\{u_n\}$  是数列,则下列命题正确的是( )  
(A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛.  
(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛,则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.  
(C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛.  
(D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛,则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.
- (4) 设  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$ ,则  $I, J, K$  的大小关系为( )  
(A)  $I < J < K$ . (B)  $I < K < J$ .  
(C)  $J < I < K$ . (D)  $K < J < I$ .
- (5) 设  $A$  为 3 阶矩阵,将  $A$  的第 2 列加到第 1 列得矩阵  $B$ ,再交换  $B$  的第 2 行与第 3 行得单位矩阵.记  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,则  $A =$  ( )  
(A)  $P_1 P_2$ . (B)  $P_1^{-1} P_2$ . (C)  $P_2 P_1$ . (D)  $P_2 P_1^{-1}$ .
- (6) 设  $A$  为  $4 \times 3$  矩阵,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  的 3 个线性无关的解,  $k_1, k_2$  为任意常数,则  $Ax = \beta$  的通解为( )  
(A)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$ . (B)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$ .  
(C)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ . (D)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ .
- (7) 设  $F_1(x)$  与  $F_2(x)$  为两个分布函数,其相应的概率密度  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  是连续函数,则必为概率密度的是( )  
(A)  $f_1(x)f_2(x)$ . (B)  $2f_2(x)F_1(x)$ .  
(C)  $f_1(x)F_2(x)$ . (D)  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ .

(8) 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自该总体的简单随机样

本, 则对于统计量  $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  和  $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$ , 有( )

(A)  $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$ .

(B)  $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$ .

(C)  $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$ .

(D)  $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$ .

## 二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设函数  $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$ , 则  $dz|_{(1,1)} =$  \_\_\_\_\_.

(11) 曲线  $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$  在点  $(0,0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

(12) 曲线  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , 直线  $x = 2$  及  $x$  轴所围的平面图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积为\_\_\_\_\_.

(13) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  的秩为 1,  $\mathbf{A}$  的各行元素之和为 3, 则  $f$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  下的标准形为\_\_\_\_\_.

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ , 则  $E(XY^2) =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数,  $f(1, 1) = 2$  是  $f(u, v)$  的极值,  $z = f(x+y, f(x, y))$ .

$$\text{求} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}.$$

(17) (本题满分 10 分)

求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

(18) (本题满分 10 分)

证明方程  $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$  恰有两个实根.

(19) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有连续导数,  $f(0) = 1$ , 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy, \text{ 其中 } D_t = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1).$$

求  $f(x)$  的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(21) (本题满分 11 分)

设  $A$  为 3 阶实对称矩阵,  $A$  的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

( I ) 求  $A$  的所有特征值与特征向量;

( II ) 求矩阵  $A$ .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$Y$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ .

( I ) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

( II ) 求  $Z = XY$  的概率分布;

( III ) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $G$  上的均匀分布, 其中  $G$  是由  $x - y = 0$ ,  $x + y = 2$  与  $y = 0$  所围成的三角形区域.

( I ) 求  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ ;

( II ) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x | y)$ .

## 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 【答案】(C).

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{cx^k} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (3 - \cos 2x - 2 \cos^2 x)}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos 2x - 2 \cos^2 x}{cx^{k-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - (2 \cos^2 x - 1) - 2 \cos^2 x}{cx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos^2 x}{cx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x}{cx^{k-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{cx^{k-3}} = 1. \end{aligned}$$

所以  $c = 4, k = 3$ , 故答案选(C).

(2) 【答案】(B).

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ & = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

故答案选(B).

(3) 【答案】(A).

【解析】方法 1: 数项级数的性质: 收敛级数任意添加括号后仍收敛, 故(A)正确.

方法 2: 排除法, 举反例.

选项(B)取  $u_n = (-1)^n$ , 这时  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  发散, 故选项

(B) 错误;

选项(C)取  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , 这时  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故

选项(C) 错误;

选项(D)取 $u_n = 1$ , 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散, 故选项(D)错误. 故

正确答案为(A).

(4) 【答案】(B).

【解析】因为 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时,  $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$ ,

又因 $\ln x$ 是单调递增的函数, 所以 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$ .

故正确答案为(B).

(5) 【答案】(D).

【解析】由于将 $A$ 的第2列加到第1列得矩阵 $B$ , 故

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

即 $AP_1 = B$ ,  $A = BP_1^{-1}$ .

由于交换 $B$ 的第2行和第3行得单位矩阵, 故

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = E,$$

即 $P_2 B = E$ , 故 $B = P_2^{-1} = P_2$ . 因此,  $A = P_2 P_1^{-1}$ , 故选(D).

(6) 【答案】(C).

【解析】由于 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是 $Ax = \beta$ 的3个线性无关的解, 所以 $\eta_3 - \eta_1, \eta_2 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 即 $Ax = 0$ 的基础解系中至少有2个线性无关的解, 所以可排除(A)、(B)选项.

又因为 $A \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} = 0$ , 所以 $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2}$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = \beta$ 的解, 故排除(D)选项, 因此选(C).

事实上, 由于 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是 $Ax = \beta$ 的三个线性无关的解, 所以 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 即 $Ax = 0$ 的基础解系中至少有2个线性无关的解, 亦即 $3 - r(A) \geq 2$ , 故 $r(A) \leq 1$ . 由于 $A \neq O$ , 所以 $r(A) \geq 1$ , 故 $r(A) = 1$ . 这样,  $Ax = 0$ 的基础解系中正好有2个线性无关的解, 由此知 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

因为 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是 $Ax = \beta$ 的解, 所以 $A\eta_2 = \beta, A\eta_3 = \beta$ , 因此 $A \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} = \beta$ , 所以 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$

是  $Ax = \beta$  的一个特解.

由非齐次线性方程组解的结构, 可知  $Ax = \beta$  的通解为

$$\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1).$$

(7) 【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [F_2(x)dF_1(x) + F_1(x)dF_2(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d[F_1(x)F_2(x)] = F_1(x)F_2(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

所以  $f_1F_2(x) + f_2F_1(x)$  为概率密度.

(8) 【答案】(D).

【解析】因为  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim P(\lambda)$ ,

所以  $E(X_i) = \lambda$ ,  $D(X_i) = \lambda$ , 从而有

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X) = E(X) = \lambda$$

$$\begin{aligned} E(T_2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \frac{1}{n} E(X_n) \\ &= E(X) + \frac{1}{n} E(X) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda. \end{aligned}$$

因为  $1 < 1 + \frac{1}{n}$ , 所以  $E(T_1) < E(T_2)$ .

又因为  $D(T_1) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D(X) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{\lambda}{n}$ .

$$\begin{aligned} D(T_2) &= D\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot D\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \frac{1}{n^2} D(X_n) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot D(X) + \frac{1}{n^2} \cdot D(X) = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}\right)\lambda. \end{aligned}$$

由于当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$ , 所以  $D(T_1) < D(T_2)$ .

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 【答案】  $e^{3x}(1+3x)$ .

【解析】 因为  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (1+3t)^{\frac{1}{3t}} \right]^{3t \cdot \frac{x}{t}} = x \cdot e^{3x}$ ,

所以,  $f'(x) = e^{3x}(1+3x)$ .

(10) 【答案】  $(1+2\ln 2)(dx-dy)$ .

【解析】  $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = e^{\frac{x}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)}$ ,

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[ \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x}{y}} \right], \quad \frac{dz}{dy} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[ -\frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x}{y}} \right],$$

所以,  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1)} = 2\ln 2 + 1$ ,  $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(1,1)} = -1 - 2\ln 2$ ,

从而  $dz|_{(1,1)} = (1+2\ln 2)dx - (1+2\ln 2)dy$  或  $dz|_{(1,1)} = (1+2\ln 2)(dx-dy)$ .

(11) 【答案】  $y = -2x$ .

【解析】 方程  $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$  的两端对  $x$  求导, 有

$$\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y',$$

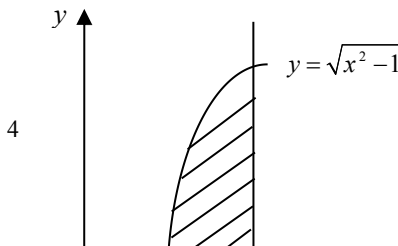
将  $x=0$ ,  $y=0$  代入上式, 有  $\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}(1 + y') = y'$ , 解得  $y'|_{(0,0)} = -2$ ,

故切线方程为:  $y = -2x$ .

(12) 【答案】  $\frac{4}{3}\pi$ .

【解析】 如图 2 所示:

$$V = \pi \int_1^2 y^2 dx$$





$$= \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3} \pi.$$

图 2

(13) 【答案】  $3y_1^2$ .

【解析】 因为  $A$  的各行元素之和为 3, 所以  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 故 3 为矩阵  $A$  的特征值.

由  $r(A) = 1$  知矩阵  $A$  有两个特征值为零, 从而  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

由于二次型在正交变换下标准形前面的系数即为二次型所对应矩阵的特征值, 所以二次型在正交变换下的标准形为  $3y_1^2$ .

(14) 【答案】  $\mu(\mu^2 + \sigma^2)$ .

【解析】 根据题意, 二维随机变量  $(X, Y)$  服从  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ . 因为  $\rho_{xy} = 0$ , 所以由二维正态分布的性质知随机变量  $X, Y$  独立, 所以  $X, Y^2$ . 从而有

$$E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = \mu[D(Y) + E^2(Y)] = \mu(\mu^2 + \sigma^2).$$

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}} \cdot 2\cos x - 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分)

【解析】  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1[(x+y), f(x,y)] + f'_2[(x+y), f(x,y)] \cdot f'_1(x,y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11}[(x+y), f(x+y)] \cdot 1 \\
&\quad + f''_{12}[(x+y), f(x+y)] \cdot f'_2(x,y) \\
&\quad + \left\{ f''_{21}[(x+y), f(x+y)] + f''_{22}[(x+y), f(x+y)] f'_2(x,y) \right\} \cdot f'_1(x,y) \\
&\quad + f'_2[(x+y), f(x+y)] \cdot f''_{12}(x,y)
\end{aligned}$$

由于  $f(1,1) = 2$  为  $f(u,v)$  的极值, 故  $f'_1(1,1) = f'_2(1,1) = 0$ ,

所以,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}(2,2) + f'_2(2,2) \cdot f''_{12}(1,1)$ .

(17) (本题满分 10 分)

【解析】 令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , 所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\arcsin t + \ln t^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (\arcsin t + \ln t^2) dt \\
&= 2t \cdot \arcsin t - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 2t \cdot \ln t^2 - 2 \int t \cdot \frac{2t}{t^2} dt \\
&= 2t \cdot \arcsin t + \int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} + 2t \cdot \ln t^2 - 4t \\
&= 2t \cdot \arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + 2t \cdot \ln t^2 - 4t + C
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.$$

(18) (本题满分 10 分)

【解析】设  $f(x) = 4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ ,

则  $f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得驻点  $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$ .

所以, 当  $x < -\sqrt{3}$  时,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  单调递减; 当  $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  单调递增; 当  $x > \sqrt{3}$  时,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  单调递减.

又当  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  时  $f(x) > 0$ , 且  $f(-\sqrt{3}) = 0$ , 故  $x \in (-\infty, \sqrt{3})$  时只有一个零点;

又  $f(\sqrt{3}) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = -\infty < 0$ , 由零

点定理可知, 存在  $x_0 \in (\sqrt{3}, +\infty)$ , 使  $f(x_0) = 0$ ;

所以, 方程  $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$  恰有两实根.

(19) (本题满分 10 分)

【解析】  $\iint_{D_t} f(t) dx dy = \frac{1}{2} t^2 f(t)$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy &= \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy \\ &= \int_0^t (f(t) - f(x)) dx \\ &= tf(t) - \int_0^t f(x) dx \end{aligned}$$

由题设有  $tf(t) - \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} t^2 f(t)$ ,

上式两端求导, 整理得

$$(2-t)f'(t) = 2f(t),$$

为变量可分离微分方程，解得  $f(t) = \frac{C}{(t-2)^2}$ ，

带入  $f(0) = 1$ ，得  $C = 4$ 。所以， $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}, 0 \leq x \leq 1$ 。

(20) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示，对  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  进行初等行变换：

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

当  $a = 5$  时， $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2 \neq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1) = 3$ ，此时， $\alpha_1$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示，故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示。

(II) 对  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  进行初等行变换：

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

故  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ ， $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ， $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ 。

(21) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 由于  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 设  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ , 则

$A(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_1, \alpha_2)$ , 即  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ , 而  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ , 知  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ , 对应的特征向量分别为  $k_1\alpha_1 (k_1 \neq 0)$ ,  $k_2\alpha_2 (k_2 \neq 0)$ .

由于  $r(A) = 2$ , 故  $|A| = 0$ , 所以  $\lambda_3 = 0$ .

由于  $A$  是三阶实对称矩阵, 故不同特征值对应的特征向量相互正交, 设  $\lambda_3 = 0$  对应的特征向量为  $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得  $\alpha_3 = (0, 1, 0)^T$ , 故  $\lambda_3 = 0$  对应的特征向量为  $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$ .

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交, 只需单位化:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \beta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = (0, 1, 0)^T.$$

$$\text{令 } Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = Q \Lambda Q^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(22) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 因为  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ , 所以  $P\{X^2 \neq Y^2\} = 1 - P\{X^2 = Y^2\} = 0$ .

即  $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$ .

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0, Y = -1\} - P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{3};$$

$$P\{X = 1, Y = -1\} = P\{Y = -1\} - P\{X = 0, Y = -1\} = \frac{1}{3};$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{3}.$$

即  $(X, Y)$  的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II)  $Z$  的所有可能取值为  $-1, 0, 1$ .

$$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{1}{3}.$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3}.$$

$$P\{Z = 0\} = 1 - P\{Z = 1\} - P\{Z = -1\} = \frac{1}{3}.$$

$Z = XY$  的概率分布为

$Z$	-1	0	1
$P$	1/3	1/3	1/3

$$(III) \text{ 因为 } \rho_{XY} = \frac{Cov(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}},$$

其中

$$E(XY) = E(Z) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

所以  $E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$ , 即  $X, Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = 0$ .

(23) (本题满分 11 分)

【解析】二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, y < x < 2 - y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

$$(I) \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 1 dy = x.$$

$$\text{当 } 1 \leq x < 2 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2-x} 1 dy = 2 - x.$$

$$X \text{ 的边缘概率密度为 } f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(II) \text{ 当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } Y \text{ 的边缘概率密度为 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^{2-y} 1 dx = 2 - 2y.$$

当  $0 < y < 1$  时,  $f_{X|Y}(x|y)$  有意义, 条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2 - 2y}, & y < x < 2 - y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$