

2021 研究生入学考试考研数学试卷 (数学一)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 连续且取得极大值 (B) 连续且取得极小值
(C) 可导且导数为零 (D) 可导且导数不为零

2. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

3. 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则

- (A) $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$ (B) $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$
(C) $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$ (D) $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数依次为

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

6. 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 记 $\beta_1 = a_1, \beta_2 = a_2 - k\beta_1, \beta_3 = a_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$, 若



$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为

- (A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

7. 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是

- (A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$ (B) $r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$
(C) $r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$ (D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$

8. 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列为假命题的是

- (A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$
(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(A)$
(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$
(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$

9. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令

$$\theta = u_1 - u_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则}$$

- (A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏差估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$
(B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏差估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$
(C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏差估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$
(D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏差估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 简单随机样本, 考虑假设检验问题:

$H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为

$W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$, 该检验犯第二类错误的概率为

- (A) $1 - \Phi(0.5)$ (B) $1 - \Phi(1)$ (C) $1 - \Phi(1.5)$ (D) $1 - \Phi(2)$



二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$ _____

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} =$ _____

13. 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为 $y =$ _____

14. 设 Σ 为空间区域 $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy =$ _____

15. 设 $A = a_{ij}$ 为 3 阶矩阵， A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A| = 3$ ，
则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$ _____

16. 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球，选取甲盒中任意一球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为 _____

三、解答题：17~22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将答案写在答题纸指定位置上。

17. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$

18. (本题满分 12 分)

设 $\mu(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} (n=1, 2, \dots)$ ，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)$ 的收敛域及和函数。

19. (本题满分 12 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值。

20. (本题满分 12 分)

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通区域， $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1



(1) 求 $I(D_1)$ 的值.

(2) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(1) 求正交矩阵 P , 使 $P^T A P$ 为对角矩阵

(2) 求正定矩阵 C , 使 $C^2 = (a+3)E - A$, E 为 3 阶单位矩阵.

22. 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长

度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度; (2) 求 Z 的概率密度; (3) 求 $E(\frac{X}{Y})$.



2021 考研数学试卷答案速查 (数学一)

一、选择题

- (1) (D) (2) (C) (3) (A) (4) (B) (5) (B)
 (6) (A) (7) (C) (8) (D) (9) (C) (10) (B)

二、填空题

- (11) $\frac{\pi}{4}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $y = x^2$
 (14) 4π (15) $\frac{3}{2}$ (16) $\frac{1}{5}$

三、解答题

$$(17) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) \sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) + 1 - \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} \quad (7 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \quad (9 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} \quad (10 \text{ 分})$$

$$(18) \quad u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(1) \quad \text{设 } v_n(x) = e^{-nx}, \quad w_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \quad \text{则 } u_n(x) = v_n(x) + w_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \text{ 收敛区间为 } (0, +\infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ 收敛区间为 } (-1, 1) \quad (3 \text{ 分})$$

$$x=0 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \text{级数发散}$$

$$x=1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{级数收敛}$$

所以级数的收敛域为 $(0, 1]$. (4 分)



$$(2) \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}[1-e^{-nx}]}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} (x > 0) \quad (6 \text{ 分})$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\text{则 } S_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} (x \neq 1)$$

$$S_2'(x) - S_2'(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-x|, \text{ 因为 } S_2'(0) = 0, \text{ 所以 } S_2'(x) = -\ln|1-x| (x \neq 1)$$

$$S_2(x) - S_2(0) = \int_0^x -\ln|1-t| dt = (1-x)\ln|1-x| + x, \text{ 因为 } S_2(0) = 0, \text{ 所以}$$

$$S_2(x) = (1-x)\ln|1-x| + x (x \neq 1) \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{因此 } x \neq 1 \text{ 时, } S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln|1-x| + x$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 和函数连续, 所以 } S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln|1-x| + x \right) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + 1$$

$$\text{所以, } S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x)\ln|1-x| + x, & 0 < x < 1 \\ \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + 1 & x = 1 \end{cases} \quad (12 \text{ 分})$$

(19) 根据题意, 目标函数为 $f(x, y, z) = z^2$, 约束条件是 $x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0$ 以及 $4x + 2y + z - 30 = 0$ (2 分)

$$\text{设 } F(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$$

$$\begin{cases} F'_x = 2\lambda x + 4\mu = 0 \\ F'_y = 4\lambda y + 2\mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0 \\ F'_\mu = 4x + 2y + z - 30 = 0 \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

解得 $(x, y, z) = (4, 1, 12)$ 或者 $(x, y, z) = (-8, -2, 66)$ (10 分)

$$f(4, 1, 12) = 12^2, \quad f(-8, -2, 66) = 66^2$$

因此距离的最大值为 66 (12 分)

(20)



(1) 根据题意, 易知 $D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\iint_{D_1} (4 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 8\pi \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$$

$$P(x, y) = \frac{xe^{x^2+4y^2} + y}{x^2 + 4y^2}, Q(x, y) = \frac{4ye^{x^2+4y^2} - x}{x^2 + 4y^2}$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2 + 4y^2 - 1) + x^2 - 4y^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

补充曲线 $l_1: x^2 + 4y^2 = \varepsilon^2$ (顺时针方向)

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} \\ &= \oint_{\partial D_1 + l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} - \oint_{l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} \end{aligned}$$

由格林公式可知,

$$\oint_{\partial D_1 + l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

其中 D_2 为 ∂D_1 和 l_1 围成的封闭区域. (8 分)

$$\oint_{l_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{l_1} (xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy$$

根据格林公式

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{l_1} (xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_3} -2 dx dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \varepsilon = \pi$$

其中 D_3 是 l_1 围成的封闭区域.

$$\text{所以 } \int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2} = -\pi \quad (12 \text{ 分})$$



(21)

$$(1) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a + 1)^2 (\lambda - a - 2)$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = a - 1, \lambda_3 = a + 2$ (2分)

$$(a - 1)E - A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{解得 } a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(a + 2)E - A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{解得 } a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4分)$$

$$\text{将 } a_1, a_2 \text{ 进行施密特正交化可得 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{(a_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (6分)$$

$$\text{将 } (\beta_1, \beta_2, a_3) \text{ 单位化, 可得 } \gamma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\text{可得正交矩阵 } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{使 } P^T A P = \Lambda = \begin{pmatrix} a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix} \quad (8分)$$

(2) 因为 $P^T A P = \Lambda$ 可知 $A = P \Lambda P^T$,

$$C^2 = (a + 3)E - A = P[(a + 3)E - \Lambda]P^T = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T$$

因为 C 为正定矩阵, 所以



$$C = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad (12 \text{ 分})$$

(22)

易知 $X + Y = 2, Y > X > 0$, 且 X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布;

(I) X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(4 分)

(II) Z 的分布函数 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\}$:

$z < 1$ 时, $F_Z(z) = 0$; $z \geq 1$ 时, $F_Z(z) = \int_{\frac{2}{z+1}}^1 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1}$;

Z 的概率密度为 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(8 分)

(III) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{2-x} - 1\right) dx$

$= -2 \ln |2-x| \Big|_0^1 - 1 = 2 \ln 2 - 1$

(12 分)

