2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ (　　)

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

(3) 设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性(　　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (　　)

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　(D) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则(　　)

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ (　　)

(A) 0.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度,若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}\quad (a>0,b>0)$$

为概率密度,则a,b应满足(　　)

(A)$2a+3b=4$.　　(B)$3a+2b=4$.　　(C)$a+b=1$.　　(D)$a+b=2$.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u, \end{cases}$则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$______.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$______.

(11)已知曲线L的方程为$y=1-|x|\,(x\in[-1,1])$,起点是$(-1,0)$,终点为$(1,0)$,则曲线积分$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$______.

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,则$\Omega$的形心的竖坐标$\bar{z}=$______.

(13)设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2,则$a=$______.

(14)设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$,$k=0,1,2,\cdots$,则$E(X^2)=$______.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求微分方程$y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$的通解.

(16)(本题满分10分)

求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} \mathrm{d}S$,其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

,

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2010年（数一）真题答案解析

一、选择题

（1）C

解法　用求幂指数型极限的一般方法。求 $I=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$，

归结为求 $$W=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1+1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)=a-b.$$

因此 $I=e^{a-b}$.故应选 C.

（2）B

解　因为 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，则对 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ 求偏导数得

$$F_x'=F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right),\quad F_y'=F_1'\cdot\frac{1}{x},\quad F_z'=F_2'\cdot\frac{1}{x},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\frac{1}{x}}{F_2'\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=z.$

（3）D

解　显然广义积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 有两个瑕点 $x=0$ 与 $x=1$，则

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为 $x=0$，

设 $n>1$，$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot x^{\frac{1}{n}}=0$，由于 $0<\dfrac{1}{n}<1$，故收敛.

设 $n=1,m=1,2$，$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在，故此时不是反常积分.

设 $n=1,m>2$，$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}\cdot x^{1-\frac{2}{m}}$ 存在，又 $0<1-\dfrac{2}{m}<1$，故收敛.

对于$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为$x=1$，当$m$为正整数时，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}=0$，故收敛.

所以，不论m,n取何正整数，反常积分都收敛.故选D.

(4) D

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$$

(5) A

解 由于$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times m$矩阵，故$r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，$r(\boldsymbol{B})\leqslant m$.

又$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，于是$m=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，$m=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant m$，

所以$r(\boldsymbol{A})=m$，$r(\boldsymbol{B})=m$.

(6) D

解 设λ是$\boldsymbol{A}$的特征值.由于$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，

所以$\lambda^2+\lambda=0$，即$(\lambda+1)\lambda=0$，

故$\boldsymbol{A}$的特征值为-1或0.又$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，所以$\boldsymbol{A}$可相似于对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$.

且$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=3$，

于是$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) C

解 $P\{X=1\}=P\{X\leqslant1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$.

(8) A

解 由于$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant3,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)dx+b\int_0^{+\infty}f_2(x)dx=a\times\frac{1}{2}+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$. 可得$2a+3b=4$，故应选A.

二、填空题

(9) 0

解 由题设条件 $x'(t)=-e^{-t}$，$y'(t)=\ln(1+t^2)$，

则$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\ln(1+t^2)e^t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=\left(-e^t\ln(1+t^2)-e^t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)(-e^t)$$

$$=e^{2t}\ln(1+t^2)+\frac{2te^{2t}}{1+t^2}=e^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right].$$

从而$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$,故应填 0.

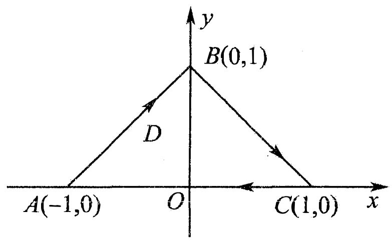
(10) -4π

解 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$

$$\xlongequal{令 t=\sqrt{x}}\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2t\,dt=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\,dt=2\left[(t^2\cdot\sin t)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\cdot 2t\,dt\right]$$

$$=-4\int_0^{\pi}t\cdot\sin t\,dt=4\left[(t\cdot\cos t)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos t\,dt\right]=4(-\pi-0)-4\sin t\Big|_0^{\pi}=-4\pi.$$

(11) 0



解 利用格林公式如右图所示,由题设条件知.

$L=\overline{AB}+\overline{BC}$.

记$L_1=\overline{CA}$,则$L+L_1$为闭曲线且所围区域记为D,

此时,$P(x,y)=xy$,$Q(x,y)=x^2$,且$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$,$\frac{\partial P}{\partial y}=x$.

由格林公式知

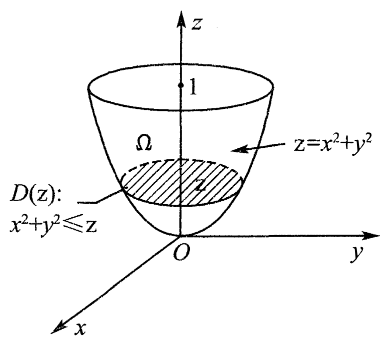
$$\oint_{-(L+L_1)}xy\,dx+x^2dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D x\,dx\,dy=0(由对称性),$$

则$\int_L xy\,dx+x^2dy=-\int_{-L}xy\,dx+x^2dy$

$$=-\oint_{-(L+L_1)}xy\,dx+x^2dy+\int_{-L_1}xy\,dx+x^2dy$$

$$=\int_{-L_1}xy\,dx+x^2dy=\int_{-1}^{1}(x\cdot 0+x^2\cdot 0)dx=0.$$

(12) $\frac{2}{3}$



解 由题设所求坐标为$\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\,dV}{\iiint_\Omega dV}$,

其中积分区域Ω如右图所示用平面$z=z(0\leqslant z\leqslant 1)$截积分区域$\Omega$得截面$D(z)$且$D(z)$是一圆域:$x^2+y^2\leqslant z$.

于是$\iiint_\Omega z\,dV=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}z\,dx\,dy=\int_0^1 z\,dz\iint_{D(z)}dx\,dy$

$$=\int_0^1 z\cdot\pi z\,dz=\pi\int_0^1 z^2\,dz=\frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_\Omega dV=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}dx\,dy=\int_0^1\pi z\,dz=\frac{\pi}{2}z^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

即 $\bar{z}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3}$,故应填$\frac{2}{3}$.

(13) 6

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2,所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

对矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$进行初等行变换:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=6$.故应填 6.

(14) 2

解 因为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k=1$,故

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k\,!}=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\,!}=C\mathrm{e}=1\qquad(\text{其中}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k\,!}=\mathrm{e}^{\lambda}).$$

即得 $C=\mathrm{e}^{-1}$.所以

$$P\{X=k\}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k\,!},k=0,1,2,\cdots$$

则 $EX^2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k\,!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)+1}{(k-1)!}=2$.

三、解答题

(15) **解** 由题设知,齐次方程对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,

解得特征根为:$r_1=1,r_2=2$.

于是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解是:

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x},(C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

由条件知原方程的一个特解可设为:$y_1=x(ax+b)\mathrm{e}^x$,(其中 a,b 为待定系数).

则 $y_1'=[ax^2+(2a+b)\cdot x+b]\mathrm{e}^x$,$y_1''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x$.

将 y_1,y_1',y_1'' 代入原方程并整理得

$$y_1''-3y_1'+2y_1=(2a-b-2ax)\mathrm{e}^x=2x\mathrm{e}^x$$

比较等式两端 x 同次幂的系数得

$$\begin{cases}-2a=2\\2a-b=0\end{cases},\text{即}\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$$

于是特解 $y_1=-x(x+2)\mathrm{e}^x$.

故原方程通解为

$$y=Y+y_1=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x(\text{其中 }C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

(16) **解** 由 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,

则 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x-x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}2x=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

$f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$,$x=\pm1$.

则 $f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$，$f''(\pm1)=4e^{-1}>0$，

所以 $f(0)=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ 是极大值，$f(\pm1)=0$ 是极小值.

由于当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$.

故　$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

　　$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(17) **解**　(Ⅰ) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$，

故当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n$，所以 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$.

所以 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(1+n)^2}$，

而 $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1 t^n\ln t\,dt=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{n+1}t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}$，

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+n)^2}=0$，

根据夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18) **解**　① 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}\right|=x^2$，

所以由比值法知，当 $x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数收敛；当 $x^2>1$ 即 $|x|>1$ 时，级数发散.

于是可知幂级数的收敛半径 $R=1$，即收敛区间为 $(-1,1)$；

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 为交错级数，由莱布尼茨定理知级数收敛，

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

② 记 $S(x)$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的和函数，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot S_1(x)$$

其中 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$x\in[-1,1]$

由幂级数和函数的性质得

$$\begin{aligned}S_1'(x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\\&=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots\\&=\frac{1}{1+x^2},x\in[-1,1].\end{aligned}$$

所以　$S_1(x)=\int_0^x S_1'(t)dt+S_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+0=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x$.

故 $S(x)=xS_1(x)=x\arctan x, x\in[-1,1]$.

(19) **解** ① 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$,则 $F(x,y,z)=0$ 为椭球面 S 的方程,设点 P 的坐标为(x,y,z),由题设条件知曲面 S 在点 P 处的切平面法向量为:

$$\boldsymbol{n}_1=\{F_x',F_y',F_z'\}=\{2x,2y-z,2z-y\},$$

又 xOy 平面的法向量为:$\boldsymbol{n}_2=\{0,0,1\}$,由于点 P 处的切平面垂直于 xOy 平面,于是 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,即 $y=2z$.

又因为点 P 在曲面 S 上,所以点 P 的坐标(x,y,z)满足曲面 S 的方程:$x^2+y^2+z^2-yz=1$,从而知动点 P 的轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$$

② 根据题设条件知,曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$ 中积分曲面 Σ 是椭球面 S 位于平面 $y=2z$ 上方的部分,因此在 Σ 上:$y\leqslant 2z$,于是 $|y-2z|=2z-y$,即

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$$

在曲面 Σ 的方程:$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两端分别对 x、y 求偏导数(此时,$z=z(x,y)$)得

$$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$$

$$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}$$

将曲面 Σ 向 xOy 面投影,得投影域为:

$$D_{xy}:x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1.$$

又因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2-yz)+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad(\text{因 }x^2+y^2+z^2-yz=1)$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\dfrac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20) **解** (Ⅰ) 已知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 2 个不同的解,所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})<3$.

又 $|\boldsymbol{A}|=0$,即 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$,知 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=2$,此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解,故 $\lambda=-1$.

又由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$ 得 $a=-2$.

(Ⅱ) 因 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$

则原方程组的等价方程组为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}+x_3\\x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$,其中 x_3 为自由未知量.

令 $x_3=0$,得方程组特解 $\boldsymbol{u}_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

又方程组对应的齐次方程组的等价方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$,其中 x_3 为自由未知量.

令 $x_3=1$,得齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21) **解** (Ⅰ) 由于二次型在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0.$$

由于 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的,设属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$,即 $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$,取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交的,即为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相互正交的,所以只需单位化:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）由于$\boldsymbol{A}$的特征值为1,1,0,所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值为2,2,1,则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值全大于零,故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$是正定矩阵.

(22) 解 因为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}=A\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$

$$=A\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$$

由概率密度的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}y=A\pi$$

故 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

从而 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$,

又 $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$.

所以 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$

(23) 解 因为 $N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2)$,

所以
$$\begin{aligned}ET&=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1EN_1+a_2EN_2+a_3EN_3\\&=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2\\&=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2\end{aligned}$$

由 T 是 θ 的无偏估计量,可知 $ET=\theta$,

则 $\begin{cases}na_1=0,\\ n(a_2-a_1)=1,\\ n(a_3-a_2)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1=0,\\ a_2=\dfrac{1}{n},\\ a_3=\dfrac{1}{n}.\end{cases}$

故 $T=0\times N_1+\dfrac{1}{n}\times N_2+\dfrac{1}{n}\times N_3=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)=\dfrac{1}{n}(n-N_1)$.

$$DT=D\left[\frac{1}{n}(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot(1-\theta)\cdot\theta=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$