

2012 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为()
- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()
- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.
- (3) 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是()
- (A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.
(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.
(C) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.
(D) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.
- (4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有()
- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$. (C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.
- (5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的为()
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()
- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$ ()
- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为()

(A) 1.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{1}{2}$.

(D) -1.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} =$ _____.

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____.

(13) 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB \mid \bar{C}) =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1).$

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$.

若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|\mathbf{A}|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.