2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$,则(　　)

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(4) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量.若产量为 Q_0 时平均成本最小,则(　　)

(A) $C'(Q_0)=0$.　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$.　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}=$(　　)

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本.令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$, $S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$,则(　　)

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$.　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

(C) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^{*}} \sim t(n)$.　　(D) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^{*}} \sim t(n-1)$.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 曲线 $y=x^{2}+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是______.

(10) $\int e^{x}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=$______.

(11) 差分方程 $\Delta^{2}y_{x}-y_{x}=5$ 的通解为______.

(12) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,且 $f(0)=2$,则 $f(1)$ =______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

(14) 随机事件 A,B,C 相互独立,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$,则 $P(AC\mid A\cup B)=$______.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$,求 a,b.

(16)(本题满分10分)

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^{2})}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成.计算二重积分 $\iint\limits_{D}x^{2}\,dx\,dy$.

(17)（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

(18)（本题满分 10 分）

已知 $\cos 2x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$，求 a_n.

(19)（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(20)（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（Ⅰ）求 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解；

（Ⅱ）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

(21)(本题满分 11 分)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 a;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ) 求 Z 的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ) 求 $\hat{\sigma}$;

(Ⅱ) 求 $E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

2018年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) D

解 对于 D 选项 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$,

由 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\dfrac{1}{2}$,

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2},$$

可得 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$,因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.故应选 D.

(2) D

解 当 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}$,满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,排除 A,C.

当 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}$,满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,且 $f''(x)<0$,而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2}{3}$,显然大于 0,排除 B.故应选 D.

(3) C

解 利用对称性可计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$.

易得,$K>\pi$,$N<\pi$.所以 $K>M>N$.故应选 C.

(4) D

解 平均成本为$\dfrac{C(Q)}{Q}$,求平均成本最小值,即$\left(\dfrac{C(Q)}{Q}\right)'=0$,则$\dfrac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}=0$,得 $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.故应选 D.

(5) A

解 易知题中矩阵的特征值均为 3 重特征值 1,若矩阵相似,则特征值对应的 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$,

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 秩必然相等,显然 $\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$的秩为 2.

故应选 A.

(6) A

解 对于 B 选项,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{BA})=2\neq r(\boldsymbol{A})$,排除 B.

对于 C 选项,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=2\neq \max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$,排除 C.

对于 D 选项,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B})=2\neq r(\boldsymbol{A}^T\quad \boldsymbol{B}^T)$,排除 D.

故应选 A.

(7) A

解 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可知,$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,所以 $\int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0.5$.

又已知,$\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=0.3$.

所以,$P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=0.2$.

故应选 A.

(8) B

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,得 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.所以 $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$.

而 $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.因此 $\frac{\sqrt{n}(x-\mu)}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2}{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.故应选 B.

二、填空题

(9) $y=4x-3$

解 $y'=2x+\frac{2}{x}$,$y''=2-\frac{2}{x^2}$,由此得拐点坐标为(1,1),曲线在拐点处斜率为 $y'(1)=4$,切线方程为 $y=4x-3$.故应填 $y=4x-3$.

(10) $e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

解 令 $\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}=t$,则 $x=\ln|\cos t|$.代入原式得 $-\int t\cos t\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=-\int t\sin t\mathrm{d}t=t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t=t\cos t-\sin t+C$,将 $t=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$ 代入得 $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\mathrm{d}x=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

故应填 $e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

(11) $C2^x-5$

解 根据二阶差分的定义可得 $\Delta^2 y_x=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$.则原式化为 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$.差分方程特征方程 $\lambda-2=0$,得齐次方程通解为 $y=C2^x$,由于 1 不是特征根,于是设特解为 $y_x=A$,代入可得 $A=-5$,于是原方程的通解为 $y_x=C2^x-5$.故应填 $C2^x-5$.

(12) $2e$

解 移项得 $f(x+\Delta x)-f(x)-2xf(x)\Delta x=o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,方程两边同除以 Δx 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-2xf(x)=0$.得 $f'(x)=2xf(x)(\Delta x\to 0)$.解得 $f(x)=Ce^{x^2}$

由 $f(0)=2$ 得 $C=2$,所以 $f(1)=2e$.故应填 $2e$.

(13) 2

解 由题意得 $A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

则 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|\neq 0$.则 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$.故应填 2.

(14) $\dfrac{1}{3}$

解 $P(AC\mid A\cup B)=\dfrac{P(AC\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(AC\cup ABC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=$

$\dfrac{P(AC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\dfrac{1}{3}$.故应填$\dfrac{1}{3}$.

三、解答题

(15) **解** 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}.$$

由题设及$\lim\limits_{t\to0^+}[(a+bt)e^t-1]=a-1$ 可得 $a-1=0$,即 $a=1$.

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}&=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^t-1}{t}\\&=\lim_{t\to0^+}\left(be^t+\frac{e^t-1}{t}\right)\\&=b+1,\end{aligned}$$

从而由题设得 $b=1$.

(16) **解**
$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}dx\int_{\sqrt3x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2\,dy\\&=\sqrt3\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^2(\sqrt{1-x^2}-x)\,dx\\&=\sqrt3\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx-\sqrt3\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^3\,dx.\end{aligned}$$

令 $x=\sin t$,则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2t\,dt\\&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos4t)\,dt\\&=\frac{\pi}{32},\end{aligned}$$

又$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^3\,dx=\frac{1}{16}$,

所以$\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

(17) **解**　设圆的半径为 x，正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z，则问题化为：函数 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在条件 $2\pi x+4y+3z=2(x>0,y>0,z>0)$ 下是否存在最小值.

令 $L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$，考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2\pi x+2\pi\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+4\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=2\pi x+4y+3z-2=0,\end{cases}$$

解得 $x_0=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，　$y_0=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，　$z_0=\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

又当 $2\pi x+4y+3z=2$ 且 $xyz=0$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为

$$f\left(0,\frac{2}{4+3\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4+3\sqrt{3}},$$

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$（单位：$\mathrm{m}^2$）.

(18) **解**　因为

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2}&=\left(-\frac{1}{1+x}\right)'\\&=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\right)'\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,-1<x<1,\end{aligned}$$

所以 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,-1<x<1$.

由题设知$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n (-1 < x < 1)$.

故$\begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} - 2n - 1, \\ a_{2n+1} = 2n + 2, \end{cases} (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$.

(19) **解** 由于 $x_1 \neq 0$,所以 $e^{x_2} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1}$.

根据微分中值定理,存在 $\xi \in (0, x_1)$,使得$\frac{e^{x_1} - 1}{x_1} = e^{\xi}$.

所以 $e^{x_2} = e^{\xi}$,故 $0 < x_2 < x_1$.

假设 $0 < x_{n+1} < x_n$,则

$e^{x_{n+2}} = \frac{e^{x_{n+1}} - 1}{x_{n+1}} = e^{\eta} (0 < \eta < x_{n+1})$,

所以 $0 < x_{n+2} < x_{n+1}$.

故$\{x_n\}$是单调减少的数列,且有下界,从而$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,得 $ae^a = e^a - 1$.易知 $a = 0$ 为其解.

令 $f(x) = xe^x - e^x + 1$,则 $f'(x) = xe^x$.

当 $x > 0$ 时,$f'(x) > 0$,函数 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上单调增加,所以 $a = 0$ 是方程 $ae^a = e^a - 1$ 在$[0, +\infty)$上的唯一的解,故$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

(20) **解** (Ⅰ) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0, \end{cases}$

对方程组的系数矩阵施以初等变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 时,方程组只有零解,故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为 $x = 0$,

当 $a = 2$ 时,方程组有无穷多解,通解为 $x = k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数,

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解是 $x = k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知,当 $a \neq 2$ 时,$f(x_1, x_2, x_3)$ 正定,$f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2, \end{aligned}$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(21) **解** (Ⅰ) 对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别施以初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}.$$

由题设知 $a=2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $a=2$,对矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})$ 施以初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,由于

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}=0,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}_3,$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},\text{其中 } k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}.$$

由于 $|\boldsymbol{X}|=k_3-k_2$,所以满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},\text{其中 } k_2\neq k_3.$$

(22) **解** (Ⅰ) 由题设可得

$$EX=(-1)\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0,$$

$$E(XZ)=E(X^2Y)=EX^2\cdot EY=\lambda.$$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=\lambda$.

(Ⅱ) Z 的所有可能取值为全体整数值,且

$P\{Z=0\}=P\{Y=0\}=e^{-\lambda}$;

对于 $n=\pm1,\pm2,\cdots$,有

$$\begin{aligned}P\{Z=n\}&=P\{XY=n\}\\&=P\left\{X=\frac{n}{|n|},Y=|n|\right\}\\&=P\left\{X=\frac{n}{|n|}\right\}P\{Y=|n|\}\\&=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{|n|}}{2\cdot|n|!}.\end{aligned}$$

(23) **解** (Ⅰ)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值,似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|},$$

则 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$,解得

$$\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

所以 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

(Ⅱ)由于 $E|X|=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x;\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}xe^{\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$,所以

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\sigma,$$

又因为

$$E|X|^2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,$$

$$D(|X|)=E(|X|^2)-(E|X|)^2=\sigma^2,$$

所以

$$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}.$$