2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则(　　)

(A) 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(4) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量.若产量为 Q_0 时平均成本最小,则(　　)

(A) $C'(Q_0)=0$.　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$.　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}$ =(　　)

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本.令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$, $S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$,则(　　)

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$.　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

(C) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n)$.　　(D) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n-1)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是______.

(10) $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx =$ ______.

(11) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解为______.

(12) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$,则 $|\boldsymbol{A}| =$ ______.

(14) 随机事件 A,B,C 相互独立,且 $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$,则 $P(AC \mid A \cup B) =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}} - x\right] = 2$,求 a,b.

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成.计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$.

(17)(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在,求出最小值.

(18)(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$,求 a_n.

(19)(本题满分 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解;

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

(21)(本题满分 11 分)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 a;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$,$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ) 求 Z 的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ) 求 $\hat{\sigma}$;

(Ⅱ) 求 $E(\hat{\sigma})$,$D(\hat{\sigma})$.