2020 年数三真题

一、选择题

(1) 设 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-a}{x-a} = b$，则 $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x-a} =$(　　)

(A)$b \sin a$.　　(B)$b \cos a$.　　(C)$b \sin f(a)$.　　(D)$b \cos f(a)$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 (　　)

(A)1 个.　　(B)2 个.　　(C)3 个.　　(D)4 个.

(3) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数，则 (　　)

(A)$\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] \mathrm{d}t$ 是奇函数.　　(B)$\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] \mathrm{d}t$ 是偶函数.

(C)$\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] \mathrm{d}t$ 是奇函数.　　(D)$\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] \mathrm{d}t$ 是偶函数.

(4) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 (　　)

(A)$(-2, 6)$.　　(B)$(-3, 1)$.　　(C)$(-5, 3)$.　　(D)$(-17, 15)$.

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 (　　)

(A)$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(B)$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(C)$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_3 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(D)$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_2 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_3 + k_3 \boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 (　　)

(A)$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　(B)$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C)$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D)$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$.

(7) 设 A，B，C 为三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$，则 A，B，C 中恰有一个事件发生的概率为 (　　)

(A)$\frac{3}{4}$.　　(B)$\frac{2}{3}$.　　(C)$\frac{1}{2}$.　　(D)$\frac{5}{12}$.

(8) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 (　　)

(A)$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.　　(B)$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

二、填空题

(9) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$______.

(10) 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在 $(0,-1)$ 处的切线方程为______.

(11) 设某厂家某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，设产品的单价为 P，需求量 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为______.

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\leq y\leq\frac{1}{1+x^2},0\leq x\leq 1\right.\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots$，$Y$ 表示 X 被 3 除的余数，则 $E(Y)=$______.

三、解答题

(15) 已知 a，b 为常数，若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to+\infty$ 时是等价无穷小，求 a，b.

(16) 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(17) 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$，$f(0)=1$，$f'(0)=-1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式.

(II) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(18) 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,y\geq 0\}$，连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$. 证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,2)$，使 $|f'(\xi)|\geq M$.

(II) 若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(\xi)|\leq M$，则 $M=0$.

(20) 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geq b$.

(I) 求 a，b 的值.

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(I) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(II) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leq 0.\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leq 0.\end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布.

(II) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

(23) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ，m 为参数且均大于零.

(I) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0$，$t>0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 t_1，t_2，$\cdots$，t_n，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.