2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　(C) $ab=0$.　(D) $ab=2$.

(2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则(　　)

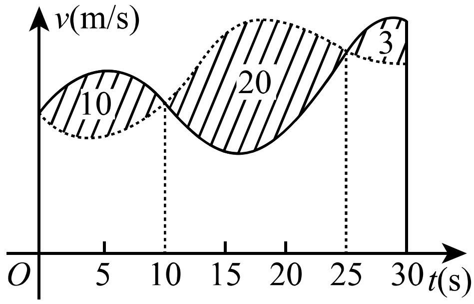
(A) $f(1)>f(-1)$.　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

(3) 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为(　　)

(A) 12.　(B) 6.　(C) 4.　(D) 2.

(4) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次是 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则(　　)



(A) $t_0=10$.

(B) $15<t_0<20$.

(C) $t_0=25$.

(D) $t_0>25$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7) 设 A,B 为随机事件. 若 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,则 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$ 的充分必要条件是(　　)

(A) $P(B\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.　(B) $P(B\mid A)<P(B\mid\overline{A})$.

(C) $P(\overline{B}\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.　(D) $P(\overline{B}\mid A)<P(B\mid\overline{A})$.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则 $f^{(3)}(0)=$______.

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$______.

(11) 若曲线积分 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关,则 $a=$______.

(12) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$______.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 $E(X)=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数,$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有 2 阶导数,且$f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明:

(Ⅰ)方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根;

(Ⅱ)方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

(19)(本题满分 10 分)

设薄片型物体S是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$割下的有限部分,其上任一点的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为$C$.

(Ⅰ)求C在xOy平面上的投影曲线的方程;

(Ⅱ)求S的质量M.

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$有 3 个不同的特征值,且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明$r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)设$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $P\{Y\leqslant E(Y)\}$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

（23）（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

（Ⅰ）求 Z_1 的概率密度；

（Ⅱ）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（Ⅲ）求 σ 的最大似然估计量.