2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　(C) $ab=0$.　(D) $ab=2$.

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是(　　)

(A) $(0,0)$.　(B) $(0,3)$.　(C) $(3,0)$.　(D) $(1,1)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则(　　)

(A) $f(1)>f(-1)$.　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛,则 $k=$(　　)

(A) 1.　(B) 2.　(C) -1.　(D) -2.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是(　　)

(A) A 与 B 相互独立.　(B) A 与 B 互不相容.

(C) AB 与 C 相互独立.　(D) AB 与 C 互不相容.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\,\mathrm{d}x=$ ______.

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$ ______.

(11) 设生产某产品的平均成本为$\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$,其中产量为 Q,则边际成本为 ______.

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$ ______.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\dfrac{1}{2}$, $P\{X=1\}=a$, $P\{X=3\}=b$,若 $E(X)=0$,则 $D(X)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

(17)（本题满分 10 分）

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(18)（本题满分 10 分）

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间$(0,1)$内有实根，确定常数 k 的取值范围.

(19)（本题满分 10 分）

若 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（Ⅰ）证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

（Ⅱ）证明$(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（Ⅰ）证明 $r(\boldsymbol{A})=2$;

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求$a$的值及一个正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X,Y相互独立,且X的概率分布为$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$的概率密度为$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅰ)求$P\{Y\leqslant E(Y)\}$;

(Ⅱ)求$Z=X+Y$的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做n次测量,该物体的质量μ是已知的,设n次测量结果$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$.该工程师记录的是n次测量的绝对误差$Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$,利用$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$估计$\sigma$.

(Ⅰ)求Z_1的概率密度;

(Ⅱ)利用一阶矩求σ的矩估计量;

(Ⅲ)求σ的最大似然估计量.

2017年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) A

解　由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=b$.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{2ax}=\dfrac{1}{2a}=b$.

所以 $ab=\dfrac{1}{2}$.故应选 A.

(2) D

解　令 $\begin{cases}z_x'=3y-2xy-y^2=0\\ z_y'=3x-2xy-x^2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$.

所以函数有四个驻点 $(0,0)$，$(1,1)$，$(0,3)$，$(3,0)$.

又令 $A=z''_{xx}=-2y$，$B=z''_{xy}=3-2x-2y$，$C=z''_{yy}=-2x$.

则在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，$(0,0)$ 不是极值点.

在 $(1,1)$ 处，$AC-B^2=3>0$，且 $A=-2<0$，$(1,1)$ 是极大值点.

在 $(0,3)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，$(0,3)$ 不是极值点.

在 $(3,0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，$(3,0)$ 不是极值点.

故应选 D.

(3) C

解　由 $f(x)f'(x)>0$，可得 $2f(x)f'(x)>0$，即 $[f^2(x)]'>0$.

因此 $f^2(x)$ 严格单增，故有 $|f(x)|$ 严格单增，所以有 $|f(1)|>|f(-1)|$.

故应选 C.

(4) C

解　$\sin\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，$k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=-\dfrac{k}{n}-\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

有 $\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1+k}{n}+\dfrac{k}{2}\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，

又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，有 $1+k=0$.(否则，级数发散)，故 $k=-1$.

故应选 C.

(5) A

解　因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$.

所以，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $1,0,0$.所以，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$，即矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

故应选 A.

(6) B

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是上三角矩阵，所以特征值都是 1，2，2.

所以，要判别 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 能否相似对角化，只需考察属于 2 的线性无关的特征向量的个数即可.

对于 $\boldsymbol{A}$，属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-1=2$.

对于 $\boldsymbol{B}$，属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=3-2=1$.

所以，$\boldsymbol{A}$ 可以和 $\boldsymbol{C}$ 相似，但是 $\boldsymbol{B}$ 不能.

故应选 B.

(7) C

解 因为 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立.

所以 $P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$

而 $P[(A\cup B)C]=P(AC\cup BC)$

$$=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$P(A\cup B)P(C)=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)$$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)$$

则 $A\cup B$ 与 C 相互独立 $\Leftrightarrow P[(A\cup B)C]=P(A\cup B)P(C)\Leftrightarrow P(ABC)=P(AB)P(C)$ $\Leftrightarrow AB$ 与 C 相互独立，故应选 C.

(8) B

解 因为 $X_i\sim N(\mu,1)$，

所以 $X_i-\mu\sim N(0,1)$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，故 A 正确；

因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{1}\sim\chi^2(n-1)$， 故 C 正确；

因为 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\right)$，

所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，

则 $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，故 D 正确.

对于 B 选项：$X_n-X_1\sim N(0,2)$，

则 $\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以 $\left(\dfrac{X_n-X_1}{2}\right)^2\sim\chi^2(1)$.从而 B 错误.

故应选 B.

二、填空题

(9) $\dfrac{\pi^3}{2}$

解 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

因为 $\sin^3x$ 是奇函数，所以 $\displaystyle\int^{\pi}\sin^3x\,\mathrm{d}x=0$.

而$\sqrt{\pi^2-x^2}$为偶函数，因此$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x$

$\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x$ 表示由 $x=0,x=\pi,y=0,y=\sqrt{\pi^2-x^2}$ 所围成图形的面积，

故有$\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot\pi^2=\frac{\pi^3}{4}$.

所以$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{2}$.

故应填$\frac{\pi^3}{2}$.

(10) $A2^t+t2^{t-1}$

解 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 对应的齐次方程为 $y_{t+1}-2y_t=0$，

特征方程为 $\lambda^{t+1}-2\lambda^t=0$，特征根为 $\lambda=2$.

因 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $Y_t=A2^t$，

再设 $y_t^*=kt2^t$ 为 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的解，代入方程得

$$k(t+1)2^{t+1}-2kt2^t=2^t.$$

解得 $k=\frac{1}{2}$. 所以 $y_t^*=\frac{1}{2}t2^t=t2^{t-1}$.

由差分方程解的结构定理得，原方程的通解为

$y_t=Y_t+y_t^*=A2^t+t2^{t-1}$.

故应填 $A2^t+t2^{t-1}$.

(11) $1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}$

解 平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$，成本为 $C(Q)=Q\overline{C}(Q)=Q+Q\mathrm{e}^{-Q}$.

边际成本为 $C'(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}-Q\mathrm{e}^{-Q}=1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}$.

故应填 $1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}$.

(12) $xy\mathrm{e}^y$

解 由题意 $f_x'(x,y)=y\mathrm{e}^y$，$f_y'(x,y)=x(1+y)\mathrm{e}^y$.

所以有 $f(x,y)=\int f_x'(x,y)\mathrm{d}x=\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x=xy\mathrm{e}^y+C(y)$.

$f_y'(x,y)=[xy\mathrm{e}^y+C(y)]'=x(1+y)\mathrm{e}^y+C'(y)=x(1+y)\mathrm{e}^y$，

$\therefore C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C$.

因此 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y+C$，又 $f(0,0)=0$.

所以 $C=0$. 故 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

故应填 $xy\mathrm{e}^y$.

(13) 2

解 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆，

所以，$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})$，易知，$r(\boldsymbol{A})=2$. 故应填 2.

(14) $\frac{9}{2}$

解 由分布律的归一性可知$\sum_k P_k=1$

即$\frac{1}{2}+a+b=1$，

又因为 $EX=0$，即$-2\times\frac{1}{2}+a+3b=0$.

解得 $a=b=\frac{1}{4}$.

而 $E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$.

所以 $DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{9}{2}$.

三、解答题

(15) **解**　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$dt=-du$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

(16) **解**
$$\iint_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{-1}{1+x^2+y^4}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\arctan x\Big|_0^{+\infty}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi.$$

(17) **解**
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1x\ln(1+x)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}.$$

(18) **解** 记 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-k,x\in(0,1]$,则 $f'(x)=\dfrac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$.

记 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$,则

$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$,

$g''(x)=\dfrac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$.

当 $x\in(0,1]$ 时,$g''(x)<0$,所以 $g'(x)<g'(0)$.

又 $g'(0)=0$,所以当 $x\in(0,1]$ 时,$g'(x)<0$,从而 $g(x)<g(0)=0$.

综上可知 $f'(x)<0$,即 $f(x)$ 单调递减.

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-k\right)=\dfrac{1}{2}-k,f(1)=\dfrac{1}{\ln2}-1-k$,

所以方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内有实根当且仅当$\begin{cases}\dfrac{1}{2}-k>0,\\ \dfrac{1}{\ln 2}-1-k<0.\end{cases}$

故常数 k 的取值范围为$\left(\dfrac{1}{\ln2}-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

(19) **解** (Ⅰ)因为 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$,所以 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$

记 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径.当 $|x|<1$ 时,因为 $|a_nx^n|\leqslant|x|^n$ 且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛,所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛,于是 $(-1,1)\subseteq(-R,R)$,故 $R\geqslant1$.

(Ⅱ)因为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,所以 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

于是 $(1-x)S'(x)-xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}]x^n$$

$$=0.$$

解方程$(1-x)S'(x)-xS(x)=0$ 得 $S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$.

由 $S(0)=a_0=1$ 得 $C=1$,故 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

(20) **解** (Ⅰ)由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant2$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有 2 个不为零的特征值,从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$.

故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,故 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

又 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21) **解** 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}.$$

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=0$.又 $|\boldsymbol{A}|=6-3a$,于是 $a=2$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$,所以特征值为 $-3,6,0$.

不妨设 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=-3$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

属于特征值 $\lambda_2=6$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

属于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

故所求的一个正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

(22) **解** (Ⅰ) $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$,

$$P\{Y\leqslant EY\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(Ⅱ) Z 的分布函数记为 $F_Z(z)$,那么

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}\\&=P\{X+Y\leqslant z\}\end{aligned}$$

$$=P\{X=0\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-2\}.$$

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}=\frac{z^2}{2}$;

当 $1\leqslant z<2$ 时,$F_Z(z)=\frac{1}{2}$;

当 $2\leqslant z<3$ 时,$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$;

当 $z\geqslant 3$ 时,$F_Z(z)=1$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(23) **解** (Ⅰ) Z_1 的分布函数为

$$F(z)=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{|X_1-\mu|\leqslant z\}=\begin{cases} 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0, \end{cases}$$

所以 Z_1 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0. \end{cases}$$

(Ⅱ) $EZ_1=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma.$

$\sigma=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}EZ_1$,令 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$,得 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$.

(Ⅲ) 记 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值,则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2},$$

对数似然函数为 $\ln L(\sigma)=n\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}}-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$,得 σ 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$,所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.