2022 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(二)试题

一、选择题：1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．

（1）当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量.给出以下四个命题

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$；

②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = \mathrm{o}(\alpha(x))$；

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = \mathrm{o}(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

其中所有真命题的序号为（　　）

（A）①③　　（B）①④

（C）①③④　　（D）②③④

（2）$\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$

（A）$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　（B）$\frac{1}{3}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

（3）$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，以下说法正确的是（　）

（A）若在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增，则 $f'(x_0) > 0$

（B）若 $f'(x_0) > 0$，则在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增

（C）若在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的，则 $f''(x_0) > 0$

（D）若 $f''(x_0) > 0$，则在 $x = x_0$ 某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的

（4）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y) = \int_0^{x-y} (x-y-t) f(t) dt$, 则（　　）

(A) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(B) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(D) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(5) 设 p 为常数，有反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则 p 的取值范围是（ ）

(A) $(-1,1)$　　(B) $(-1,2)$

(C) $(-\infty,1)$　　(D) $(-\infty,2)$

(6) 已知数列$\{x_n\}$,且$-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$,则（ ）

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$x_n$一定存在

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$x_n$一定存在

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在时，则$x_n$不一定存在

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在时，则$x_n$不一定存在

(7) 已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则以下选项正确的是(　)

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(C) $I_1<I_3<I_2$.

(B) $I_2<I_1<I_3$.　　(D) $I_3<I_2<I_1$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值$1,-1,0$的充分必要条件为：

(A) 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{Q}$.

（B）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$.

（C）存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{-1}$.

（D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

（9）设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为:

（A）有解.　　　　　　　　　（B）无解.

（C）有无穷多解或无解.　　　　（D）有唯一解或无解.

（10）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$.若向量组 α_1，α_2，α_3 与向量组 α_1，α_2，α_4 等价，则 λ 的取值范围为:

（A）$\{0,1\}$.

（B）$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-2\}$.

（C）$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\text{且}\lambda\neq-2\}$.

（D）$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\}$.

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

（11）　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$____________.

（12）　设 $x^2+xy+y^3=3$ 确定了 $y=y(x)$，则 $y''(1)=$________.

（13）$\int_0^1\dfrac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$__________.

（14）　微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为__________.

（15）　曲线的极坐标方程为 $r=\sin3\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$,则曲线与极轴所围成的面积

为__________.

（16）将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与第三行交换，再将第二列的 -1 倍加到第一列得到矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，则 $tr(\boldsymbol{A}^{-1})=-1$

三、解答题：17～22 小题,共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）（本题目满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

（18）（本题满分 12 分）

已知微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$，且满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{4}$，求 $y=y(x)$ 的弧长.

（19）（本题满分 12 分）

设 $D=\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\}$,计算 $\iint\limits_D \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（20）（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\cdot \mathrm{e}^{-(u+v)}$,且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$,

（1）记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

（21）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶连续的导函数，证明：$f''(x)\ge 0$ 的充要条件是存在不同的实数 a,b 使得 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

（22）（本题满分 12 分）

二次型 $f=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$

（1）求正交变换，将该二次型化为标准型. （2）证明：$\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{x^T x}=2$

2022

( )

1 10 , 5 , 50 ,

x o 0

A

11 16 , 5 , 30

17 22 , 70