# 2022 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(二)试题

**一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．**

（1）当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量.给出以下四个命题

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$；

②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ ,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$；

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

其中所有真命题的序号为（　　）

（A）①③　　（B）①④

（C）①③④　　（D）②③④

（2）$\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$

（A）$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　（B）$\frac{1}{3}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

（3）$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，以下说法正确的是（　）

（A）若在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增，则 $f'(x_0) > 0$

（B）若 $f'(x_0) > 0$，则在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增

（C）若在 $x = x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的，则 $f''(x_0) > 0$

（D）若 $f''(x_0) > 0$，则在 $x = x_0$ 某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的

（4）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y) = \int_0^{x-y} (x-y-t) f(t) dt$, 则（　　）



考途
考路艰辛，征途有我

(A) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(B) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(D) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(5) 设 $p$ 为常数，有反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则 $p$ 的取值范围是（ ）

(A) $(-1,1)$　　(B) $(-1,2)$

(C) $(-\infty,1)$　　(D) $(-\infty,2)$

(6) 已知数列$\{x_n\}$,且$-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$,则（ ）

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$x_n$一定存在

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$x_n$一定存在

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在时，则$x_n$不一定存在

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在时，则$x_n$不一定存在

(7) 已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则以下选项正确的是(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(C) $I_1<I_3<I_2$.

(B) $I_2<I_1<I_3$.　　(D) $I_3<I_2<I_1$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值$1,-1,0$的充分必要条件为:

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{Q}$.



考途
考路艰辛，征途有我

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

(9) 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为:

(A) 有解.　　(B) 无解.

(C) 有无穷多解或无解.　　(D) 有唯一解或无解.

(10) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$.若向量组 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 与向量组 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$ 等价，则 $\lambda$ 的取值范围为:

(A) $\{0,1\}$.

(B) $\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\text{且}\lambda\neq-2\}$.

(D) $\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1\}$.

**二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.**

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$_____.

(12) 设 $x^2+xy+y^3=3$ 确定了 $y=y(x)$，则 $y''(1)=$_____.

(13) $\int_0^1\dfrac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$_____.

(14) 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为_____.

(15) 曲线的极坐标方程为 $r=\sin3\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$,则曲线与极轴所围成的面积



考途
考路艰辛，征途有我

为_____.

（16）将 $A$ 的第二行与第三行交换，再将第二列的 $-1$ 倍加到第一列得到矩阵

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $tr(A^{-1})=-1$

**三、解答题：17～22 小题,共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

(17)（本题目满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

(18)（本题满分 12 分）

已知微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$，且满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{4}$，求 $y=y(x)$ 的弧长.

(19)（本题满分 12 分）

设 $D=\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\}$,计算 $\iint\limits_D \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\cdot \mathrm{e}^{-(u+v)}$,且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$,

(1) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；　(2) 求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

(21)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶连续的导函数，证明：$f''(x)\ge 0$ 的充要条件是存在不同的实数 $a,b$ 使得 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ .

(22)（本题满分 12 分）

二次型 $f=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$

(1) 求正交变换，将该二次型化为标准型.　(2) 证明：$\min\limits_{x\ne 0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=2$



考途
考路艰辛，征途有我

# 2022 年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学(二)试题

**一、选择题：1～10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分．下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.**

（1）$x \to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下 4 个命题：

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

其中真命题是：（　　）

（A）①③.　　（B）①④.

（C）①③④.　　（D）②③④.

**【答案】**（C）.

**【解析】**

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1\cdot 1 = 1$，①正确.

②错，反例 $\alpha(x) = x, \beta(x) = -x$;

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0$，因此 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，③正确.

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，即 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，④正确.

因此真命题有①③④，选 C.

（2）$\int_0^2 dy \int_y^2 \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx =$

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$

（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

**【答案】**（D）



考途
考路艰辛，征途有我

【解析】

$$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x \quad =\int_0^2 \frac{1}{6\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}(1+x^3) \quad =\frac{1}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

（3） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，以下说法正确的是（　）

（A）若在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增，则 $f'(x_0)>0$

（B）若 $f'(x_0)>0$，则在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 单调增

（C）若在 $x=x_0$ 的某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的，则 $f''(x_0)>0$

（D）若 $f''(x_0)>0$，则在 $x=x_0$ 某个邻域内 $f(x)$ 图像是凹的

【答案】 （B）

【解析】 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一阶连续可导，若 $f'(x_0)>0$，则在 $x=x_0$ 的邻域内 $f'(x)$ 均大于 0（局部保号性），因此 $f(x)$ 在此邻域内单调增.

（4）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$, 则（　　）

（A） $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（B） $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（C） $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（D） $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】（C）

【解析】

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$$

$$=x\int_0^{x-y}f(t)dt-y\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}tf(t)dt$$



考途
考路艰辛，征途有我

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y} f(t)dt+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)$$

$$=\int_0^{x-y} f(t)dt$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y}=-x\int_0^{x-y} f(t)dt-\int_0^{x-y} f(t)dt+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)$$

$$=-\int_0^{x-y} f(t)dt$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y),\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y),\therefore \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

综上，正确选项为（C）.

（5）设 $p$ 为常数，有反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$ 收敛，则 $p$ 的取值范围是（　）

（A）$(-1,1)$　　（B）$(-1,2)$

（C）$(-\infty,1)$　　（D）$(-\infty,2)$

**【答案】**（A）

**【解析】**先考虑 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$，

若 $p<1$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{1-p}{2}}\cdot\ln x\right)=0$，而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 也收敛；

若 $p\geqslant 1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{p-1}}=\infty$，且 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 也发散.

再考虑 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{(1-x)^{-p}}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{(1-x)^{1-p}}}{\frac{1}{(1-x)^{-p}}}=-1\neq 0$，



考途
考路艰辛，征途有我

故$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$与$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{(1-x)^{-p}}\mathrm{d}x$同敛散，故$-p<1$，即$p>-1$，选（A）.

（6）已知数列$\{x_n\}$,且$-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$,则（　　）

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

**【答案】**（D）.

**【解析】**取$x_n=(-1)^n\frac{\pi}{2}$，则（A）、（B）、（C）均错， 且（D）的“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在”是正确的；（D）的“$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在”的原因：当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$0\leqslant\cos x_n\leqslant 1$，而$\sin x$在$[0,1]$上单调，故$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在.

（7）已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x,$ 则以下选项正确的是(　　)

（A）$I_1<I_2<I_3$.

（B）$I_2<I_1<I_3$.

（C）$I_1<I_3<I_2$.

（D）$I_3<I_2<I_1$.

**【答案】**(A)

**【解析】**比较$I_1,I_2$,令$f(x)=\frac{x}{2}-\ln(1+x), x\in(0,1)$则

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}<0, x\in(0,1)$,又$f(0)=0$,所以$f(x)<f(0)=0$,$I_1<I_2$;

再比较$I_2,I_3$,令

$$g(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}-\frac{2x}{1+\sin x}=\frac{\ln(1+x)(1+\sin x)-2x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\sin x)},$$

$$h(x)=\ln(1+x)(1+\sin x)-2x(1+\cos x)$$
$$=\ln(1+x)-x+\sin x\cdot\ln(1+x)-x-2x\cos x, x\in(0,1)$$



考途
考路艰辛，征途有我

其中 $\ln(1+x)-x<0,\ \sin x\cdot\ln(1+x)-x<0,\ -2x\cos x<0$,则 $I_2<I_3$，故选(A).

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,-1,0$ 的充分必要条件为：

（A）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{Q}$.

（B）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$.

（C）存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{-1}$.

（D）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

**【答案】**（B）

**【解析】**A 有 3 个不同特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$.

（9）设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为：

（A）有解.　　（B）无解.

（C）有无穷多解或无解.　　（D）有唯一解或无解.

**【答案】**（D）

**【解析】**$|\boldsymbol{A}|=(b-1)(b-a)(a-1)$.当 $b\neq1$ 且 $a\neq1$ 且 $b\neq a$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=3$ 有唯一解；当 $b=1(b\neq1)$ 或 $a=1(b\neq1)$ 或 $a=b=1$ 时均有 $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ 无解.

（10）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则的取值范围是（　　）

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　（D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

**【答案】**（C）

**【解析】**$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{pmatrix}$



考途
考路艰辛，征途有我

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}$$

已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$

当$\lambda=-1$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$与向量组等价矛盾，故$\lambda\neq-1$

当$\lambda=-2$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$与向量组等价矛盾，故$\lambda\neq-2$

故排除$B,D$；当$\lambda=2$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故排除$A$，于是该题选择$C$.

**二、填空题：11～16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.**

（11）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$_____.

**【答案】** $e^{\frac{1}{2}}$.

**【解析】**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x(e^x-1)}{2\sin x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

（12）设$x^2+xy+y^3=3$确定了$y=y(x)$，则$y''(1)=$_____.

**【答案】** $-\dfrac{31}{32}$.

**【解析】**

同时对原等式两端求导：$2x+y+xy'+3y^2y'=0$；

再次求导：$2+2y'+xy''+6y(y')^2+3y^2y''=0$，

当$x=1$时$y=1$，$y'=-\dfrac{3}{4},y''(1)=-\dfrac{31}{32}$.

（13）$\displaystyle\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$_____.

**【答案】** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$.

**【解析】**

$$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+4\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx$$



考途
考路艰辛，征途有我

$$=\ln\left|x^2-x+1\right|\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}.$$

（14）微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为_____.

**【答案】** $y=C_1+\mathrm{e}^x\left(C_2\sin 2x+C_3\cos 2x\right)$. $C_1,C_2,C_3$ 为任意常数.

**【解析】**微分方程对应特征方程为：$\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda=0$.可得特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=1\pm 2i$ .

所以原方程的通解为：

$y=C_1+e^x\left(C_2\sin 2x+C_3\cos 2x\right)$. $C_1,C_2,C_3$ 为任意常数.

(15) 曲线的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$, 则曲线与极轴所围成的面积为_____.

**【答案】** $\frac{\pi}{12}$.

**【解析】** $S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}$.

（16）将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与第三行交换，再将第二列的 $-1$ 倍加到第一列得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，则 $tr(\boldsymbol{A}^{-1})=-1$

【解析】$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

故 $tr(\boldsymbol{A}^{-1})=-1$

**三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

（17）（本题目满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

**【答案】** $f'(1)=-1$.



考途
考路艰辛，征途有我

【解析】 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，

$$\lim_{x\to 0}\left[f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)\right]=-2f(1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}\cdot x^2$$

$$=0,$$

$$\therefore f(1)=0.$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{x^2}$$

$$=-2f'(1)=2$$

$$\therefore f'(1)=-1.$$

(18)（本题满分 12 分）

已知微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$，且满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$，求 $y=y(x)$ 的弧长.

【答案】 $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$.

【解析】由 $y'-\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}$，

$$\therefore y(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)\cdot e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln x+Cx^2$$

又 $\because y(1)=\frac{1}{4}$， $\therefore C=\frac{1}{4}$

即 $y(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2$,

$$\therefore y'(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}x$$

从而弧长 $L=\int_1^e\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_1^e$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$$

(19)（本题满分 12 分）

设 $D=\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\}$, 计算



考途
考路艰辛，征途有我

$\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

【答案】$2\pi-2.$

【解析】设 $D=D_1+D_2$，其中

$D_1=\{(x,y)\,|\,2-y\le x\le y-2,0\le y\le 2\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,2-y\le x\le \sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\}$，

则二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2} \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中：$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\pi+2$；

又 $D_1$ 关于 $y$ 轴对称，则 $\iint\limits_{D_1} \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

$\iint\limits_{D_2} \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2}\frac{r\sin\theta r\cos\theta}{r^2}r\mathrm{d}r$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\cdot r^2\Big|_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2}\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\left[1-\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\right]\mathrm{d}\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\right)\mathrm{d}\theta=2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta$

$=2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan 2\theta\cdot\sec 2\theta-\tan^2 2\theta)\mathrm{d}\theta$

$=2-2\left(\frac{1}{2}\sec 2\theta-\frac{1}{2}\tan 2\theta+\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi$

故 $I=2+\pi-(4-\pi)=2\pi-2.$

（20） (本题满分 12 分)

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\cdot \mathrm{e}^{-(u+v)}$,且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$,

（1）记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$,

（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.



考途
考路艰辛，征途有我

【答案】（1） $2(2x-y)\cdot e^{-y}$；（2） $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$，极小值为 $f(0,0)=0$

【解析】（1） $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y-x)}{\partial x}$，令 $u=x,v=y-x$,

$$\frac{\partial f(x,y-x)}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$
$$=2(u-v)\cdot e^{-(u+v)}=2(2x-y)\cdot e^{-y}$$

（2） $g(x,y)=2(x^2-xy)e^{-y}+C(y)$,又 $f(x,0)=g(x,x)=C(x)=x^2e^{-x}$,

所以 $C(x)=x^2e^{-x}$, $g(x,y)=2(x^2-xy)e^{-y}+y^2e^{-y}=[2x^2-2xy+y^2]e^{-y}$,

令 $\begin{cases}x=u\\y-x=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=u\\y=u+v\end{cases}$ 得

$$f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+(u+v)^2e^{-(u+v)}=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$$

令 $\begin{cases}f_u'=[2u-(u^2+v^2)]e^{-(u+v)}=0\\f_v'=[2v-(u^2+v^2)]e^{-(u+v)}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}$

$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Big|_{(0,0)}=2,B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\Big|_{(0,0)}=0,C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Big|_{(0,0)}=2,\ AC-B^2>0,A>0,$ 得

$f(u,v)\big|_{(0,0)}=0$ 为极小值;

$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Big|_{(1,1)}=0,B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\Big|_{(1,1)}=-2e^{-2},C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Big|_{(1,1)}=0,\ AC-B^2<0,$ 得在 $(1,1)$ 处不是极值.

(21) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明： $f''(x)\geqslant 0$ 的充要条件为对不同实数 $a,b$

$f(\dfrac{a+b}{2})\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

【证明】 $f(x)=f(\dfrac{a+b}{2})+f'(\dfrac{a+b}{2})(x-\dfrac{a+b}{2})+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-\dfrac{a+b}{2})^2$，$\xi$ 介于 $x$ 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]dx$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]dx$$



考途
考路艰辛，征途有我

必要性：若 $f''(x)\geqslant 0$，则 $f''(\xi)\geqslant 0$，有 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)}\geqslant f(\dfrac{a+b}{2})$.

充分性：若存在 $x_0$ 使得 $f''(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 有二阶连续导数，故存在 $\delta>0$ 使得 $f''(x)$

在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 内恒小于零，记 $a=x_0-\delta,b=x_0+\delta$，

此时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\dfrac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-\dfrac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x$

$<f(\dfrac{a+b}{2})(b-a)$，矛盾！故 $f''(x)\geqslant 0$.

综上，充分性必要性均得证.

（22）(本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型为标准型；

（2）证明 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

**【答案】**（1）$Q=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3\end{cases}$$

$f(x)=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

（2）$\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=\dfrac{2y^Ty}{y^Ty}=2$

**【解析】**

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，



考途
考路艰辛，征途有我

二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)$$

得特征值$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$得$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^T$

当$\lambda_3=2$时，$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$得$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1)^T$.

将$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1)^T$正交单位化得

$\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 可得 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\x_2=y_2\\x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\end{cases}$$

$$f(x)=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$$

(2) 由（1）知$f(x)=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，故$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

故$\frac{f(x)}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\frac{g(y)}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

$$=2+\frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant 2$$

当$y_1=y_2=0,y_3\neq 0$时，可取到最小值$2$.

所以存在非零向量$\boldsymbol{y}$，即存在非零向量$\boldsymbol{x}$，使得$\frac{f(x)}{x^Tx}$取到最小值$2$.得证.



考途
考路艰辛，征途有我