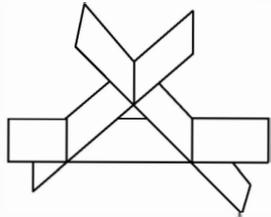


2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k = (\quad)$
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的()
 (A) 可导点,极值点. (B) 不可导点,极值点.
 (C) 可导点,非极值点. (D) 不可导点,非极值点.
- (3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是()
 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.
- (4) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$. 如果对上半平面 ($y > 0$) 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为()
 (A) $y - \frac{x^2}{y^3}$. (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$. (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. (D) $x - \frac{1}{y}$.
- (5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为()
 (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.
- (6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 A, \bar{A} , 则()
 (A) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$.
 (B) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$.
 (C) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$.
 (D) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$.
- 
- (7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是()
 (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
 (C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ()
 (A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
 (C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.



二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(10) 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.

(11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

(12) 设 Σ 设为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4(z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____.

(13) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为3阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分10分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(16) (本题满分10分)

设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为10.

(I) 求 a, b ;

(II) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.



(17) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19) (本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这个基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(I) 求 a, b, c ;

(II) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.



(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.



2019年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) C

解 $\tan x$ 的麦克劳林展开式为 $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,

故 $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 则 $k=3$. 故应选 C.

(2) B

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 不存在,

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点. $f(0)=0$, 在 $x=0$ 点的左邻域内 $f(x) < 0$, 右邻域内 $f(x) < 0$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 故应选 B.

(3) D

解 取 $u_n = -\frac{1}{\ln n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 发散, A 错误.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$ 收敛, 则由莱布尼茨判别法, $\frac{1}{u_n}$ 应单调递减趋向于零,

而由题意 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列, 则 $\frac{1}{u_n}$ 单调递减不趋于零, B 错误.

取 $u_n = -\frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散, C 错误.

对于 D 选项: $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2) = (u_2^2 - u_1^2) + (u_3^2 - u_2^2) + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}^2 - u_1^2)$ 存在,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$ 收敛. 故应选 D.

(4) D

解 曲线积分与数径无关, 则应使 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 排除 A、B.

对于 C 选项, $x=0$ 不连续, 排除. 故应选 D.

(5) C

解 设 λ 是 \mathbf{A} 的特征值, 根据 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$ 得: $\lambda^2 + \lambda = 2$, 解得 $\lambda = 1$ 或 -2 .

由于 \mathbf{A} 是 3 阶实对称矩阵, 则 \mathbf{A} 的三个特征值的积为 $|\mathbf{A}|$ 的值,

故 \mathbf{A} 的三个特征值为 $1, -2, -2$, 正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2,

故二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范型为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 故应选 C.

(6) A

解 三张平面无公共交线, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 无解 $\Rightarrow r(\mathbf{A}) < r(\overline{\mathbf{A}})$, 排除 B、D.

又因为三张平面两两相交, 且交线相互平行, 则齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

只有一个线性无关解, 所以 $r(\mathbf{A}) = 2$,

故应选 A.



(7) C

解 由 $P(\overline{AB}) = P(B\overline{A})$ 得

$$P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \Leftrightarrow P(A) = P(B).$$

故应选 C.

(8) A

解 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且相互独立,

则 $E(X - Y) = 0, D(X - Y) = DX + DY = 2\sigma^2$, 得 $\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$,

故 $P\{|X - Y| < 1\} = P\left\{\frac{|X - Y|}{\sqrt{2}\sigma} < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1$ 与 σ^2 有关, 与 μ 无关.

故应选 A.

二、填空题

(9) $\frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos x \cdot f' + y, \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y \cdot f' + x$, 代入得

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}. \text{ 故应填 } \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$$

(10) $\sqrt{3e^x - 2}$

解 $2yy' - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2}{2y} \Rightarrow \frac{2y}{y^2 + 2} dy = dx \Rightarrow \int \frac{2y}{y^2 + 2} dy = \int dx$,

则通解 $y^2 + 2 = ce^x$, 再由 $y(0) = 1$, 得 $c = 3$,

故特解 $y = \sqrt{3e^x - 2}$. 故应填 $\sqrt{3e^x - 2}$.

(11) $\cos \sqrt{x}$

解 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \cos \sqrt{x}$. 故应填 $\cos \sqrt{x}$.

(12) $\frac{32}{3}$

解 将曲面方程代入积分表达式中, 原积分 $= \iint_{\Sigma} |y| dx dy$,

由于 Σ 关于 xoz 平面对称, 则 $\iint_{\Sigma} |y| dx dy = 2 \iint_{\Sigma_1} y dx dy$, 其中 Σ_1 为 Σ 的右半侧 ($y \geq 0$),

原积分 $= 2 \iint_{D_{xy}} y dx dy$, 其中 D_{xy} 为 Σ_1 在 xoz 平面的投影,

$$D_{xy} = 2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta dr = \frac{32}{3}. \text{ 故应填 } \frac{32}{3}.$$

(13) $x = k(1, -2, 1)^T, k \in \mathbf{R}$

解 先计算 A 的秩, 由于 α_1, α_2 线性无关, 可知 $r(A) \geq 2$; 又由于 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 可知 $r(A) \leq 2$. 从而有 $r(A) = 2, Ax = 0$ 的基础解系中含有一个向量.



由 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 可知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = \mathbf{0}$, 从而 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即为 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系.

$Ax = \mathbf{0}$ 的通解为 $k(1, -2, 1)^T$, 故应填 $x = k(1, -2, 1)^T$, k 为任意常数.

(14) $\frac{2}{3}$

解 由随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 可知 X 的分布函数

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases} EX = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} P\{F(X) > EX - 1\} &= P\left\{F(X) > \frac{4}{3} - 1\right\} = P\left\{\frac{X^2}{4} > \frac{1}{3}\right\} \\ &= P\left\{X > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

三、解答题

(15) 解 (I) 这是一阶线性微分方程, 由公式法可得方程的通解为

$$y = e^{-\int x dx} \left(\int e^{\int x dx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C \right) = (x + C)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

因为 $y(0) = 0$, 可知 $C = 0$, 则 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(II) $y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, 进一步 $y'' = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$,

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

则函数的凸区间为: $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$,

凹区间为: $[-\sqrt{3}, 0), [\sqrt{3}, +\infty)$,

拐点: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

(16) 解 (I) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax, \frac{\partial z}{\partial y} = 2by$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(3,4)} = 6a, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(3,4)} = 8b$,

由于方向导数最大方向即为梯度方向, 从而 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}$, 所以 $a = b$ 且 $a < 0, b < 0$.



又由于 $6a\left(-\frac{3}{5}\right) + 8b\left(-\frac{4}{5}\right) = 10$, 所以 $a = b = -1$.

(II) 要计算曲面 $z = 2 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ (设为 Σ) 的面积, 只需对函数 l 在曲面上求第一型曲面积分.

$$\text{即 } S = \iint_{\Sigma} dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

其中 D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

$$\text{用极坐标计算该积分可得 } S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{13\pi}{3}.$$

(17) 解 由题意, 所求面积为

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx,$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= (-1)^n [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}] - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\text{得 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{(-1)^n}{2} [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}]$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-n\pi} + e^{-(n+1)\pi}] = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}.$$

(18) 解 (I) $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} dx$.

因为在积分区间 $[0, 1]$ 上, $x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} \leq 0$ 且不恒等于 0,

所以 $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少.

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} a_{n-2} - \frac{n-1}{3} a_n, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2, 3, \dots).$$

$$(II) \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+2} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}.$$

因为 $\{a_n\}$ 单调减少且 $a_n > 0$, 所以 $\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

(19) 解 设形心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 平面对称的,

由对称性可知 $\bar{x} = 0$, 由先二后一法可知:

$$\iiint_{\Omega} dV = \int_0^1 dz \iint_{x^2+(y-z)^2 \leq (1-z)^2} dx dy = \pi \int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{3},$$



$$\iiint_{\Omega} z dV = \int_0^1 dz \iint_{x^2+(y-z)^2 \leq (1-z)^2} z dx dy = \frac{\pi}{12};$$

$$\text{则 } \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{\iiint_{\Omega} dV} = \frac{1}{4}.$$

$$\iiint_{\Omega} y dV = \int_0^1 dz \iint_{x^2+(y-z)^2 \leq (1-z)^2} y dx dy,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \iint_{x^2+(y-z)^2 \leq (1-z)^2} y dx dy & \stackrel{u=y-z}{=} \iint_{x^2+u^2 \leq (1-z)^2} (u+z) dx du \\ & = \iint_{x^2+u^2 \leq (1-z)^2} z dx du = \pi z (1-z)^2, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} y dV = \int_0^1 \pi z (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12},$$

$$\text{故 } \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dV}{\iiint_{\Omega} dV} = \frac{1}{4}, \text{ 则形心为 } \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

(20) 解 (I) 由题目可知:

$$\beta = b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3, \text{ 代入可得 } \begin{cases} b+c+1=1 \\ 2b+3c+a=1 \\ b+2c+3=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}.$$

$$\text{(II) 由于 } |(\alpha_2, \alpha_3, \beta)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 则 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 R^3 的一个基;

设过渡矩阵为 C , 则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2, \alpha_3, \beta)C$, 进而有

$$C = (\alpha_2, \alpha_3, \beta)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(21) 解 (I) 因为矩阵 A 与 B 相似, 所以 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, $|A| = |B|$,

$$\text{即 } \begin{cases} x-4=y+1, \\ 4x-8=-2y, \end{cases} \text{ 解得 } x=3, y=-2.$$

(II) 矩阵 B 的特征多项式为 $|\lambda E - B| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$,

所以 B 的特征值为 $2, -1, -2$.

由于 A 与 B 相似, 所以 A 的特征值也为 $2, -1, -2$.

A 的属于特征值 2 的特征向量为 $\xi_1 = (1, -2, 0)^T$;

A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_2 = (-2, 1, 0)^T$;



A 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\xi_3 = (1, -2, -4)^T$.

记 $P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 于是 $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

B 的属于特征值 2 的特征向量为 $\eta_1 = (1, 0, 0)^T$;

B 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\eta_2 = (1, -3, 0)^T$;

B 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\eta_3 = (0, 0, 1)^T$.

记 $P_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 于是 $P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

由 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$,

得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$.

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP = B$.

(22) 解 (I) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\ &= P\{XY \leq z \mid Y = -1\}P\{Y = -1\} + P\{XY \leq z \mid Y = 1\}P\{Y = 1\} \\ &= pP\{-X \leq z\} + (1-p)P\{X \leq z\}. \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = pP\{X \geq -z\} + (1-p) \cdot 0 = pe^z$;

当 $z \geq 0$ 时, $F_Z(z) = p \cdot 1 + (1-p)P\{X \leq z\} = 1 - (1-p)e^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } \text{Cov}(X, Z) &= E(XZ) - EX \cdot EZ \\ &= E(X^2Y) - EX \cdot E(XY) \\ &= E(X^2) \cdot E(Y) - (EX)^2 \cdot E(Y) \\ &= DX \cdot EY \\ &= 1 - 2p, \end{aligned}$$

$\text{Cov}(X, Z) = 0$, 得 $p = \frac{1}{2}$. 所以 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(III) 因为

$$P\{X \leq 1, Z \leq -1\} = P\{X \leq 1, XY \leq -1\} = 0,$$

$$P\{X \leq 1\} > 0, P\{Z \leq -1\} > 0,$$

所以

$$P\{X \leq 1, Z \leq -1\} \neq P\{X \leq 1\}P\{Z \leq -1\}.$$



故 X 与 Z 不相互独立.

(23) 解 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$, 得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = A \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= A \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} A, \end{aligned}$$

所以 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(II) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2} \ln \frac{2}{\pi} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

令 $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = 0$, 得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$,

所以 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

