2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ (　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0, \\ x\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 可导点,极值点.　　(B) 不可导点,极值点.

(C) 可导点,非极值点.　　(D) 不可导点,非极值点.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$.　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

(4) 设函数 $Q(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面($y > 0$)内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$,那么函数 $P(x,y)$ 可取为(　　)

(A) $y - \dfrac{x^2}{y^3}$.　　(B) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}$.　　(C) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.　　(D) $x - \dfrac{1}{y}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}| = 4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为(　　)

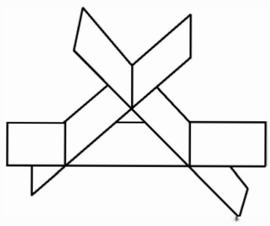
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}$, 则(　　)



(A) $r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

(B) $r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(C) $r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(D) $r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$.

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.　　(B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$.　　(D) $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ (　　)

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.　　(D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数$f(u)$可导,$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$______.

(10) 微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=$______.

(11) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$S(x)=$______.

(12) 设Σ设为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$的上侧,则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13) 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$为 3 阶矩阵. 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,且$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为______.

(14) 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$为X的分布函数,$E(X)$为X的数学期望,则$P\{F(X)>E(X)-1\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

(Ⅰ) 求$y(x)$;

(Ⅱ) 求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

(16)(本题满分 10 分)

设a,b为实数,函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3,4)$处的方向导数中,沿方向$\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$的方向导数最大,最大值为 10.

(Ⅰ) 求a,b;

(Ⅱ) 求曲面$z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$的面积.

(17)（本题满分 10 分）

求曲线 $y = e^{-x}\sin x\ (x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18)（本题满分 10 分）

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

（Ⅰ）证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n = 2, 3, \cdots)$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19)（本题满分 10 分）

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2\ (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 3, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, a, 3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标为 $(b, c, 1)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求 a, b, c；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(Ⅰ) 求 x,y;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$, $P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 Z 的概率密度;

(Ⅱ) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(Ⅲ) X 与 Z 是否相互独立?

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 求 σ^2 的最大似然估计量.