2022 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(三)试题

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．

(1) $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下 4 个命题：

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

其中真命题是：（　）

(A) ①③.　　(B) ①④.

(C) ①③④.　　(D) ②③④.

(2) 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}$，$(n=1,2,\cdots,n)$，则（　）

(A) 有最大值，有最小值.

(B) 有最大值，没有最小值.

(C) 没有最大值，有最小值.

(D) 没有最大值，没有最小值.

(3) $f(t)$ 连续，$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$,则（　）

(A) $F'_x(x,y)=F'_y(x,y),F''_{xx}(x,y)=F''_{yy}(x,y)$.

(B) $F'_x(x,y)=F'_y(x,y),F''_{xx}(x,y)=-F''_{yy}(x,y)$.

(C) $F'_x(x,y)=-F'_y(x,y),F''_{xx}(x,y)=F''_{yy}(x,y)$

(D) $F'_x(x,y)=-F'_y(x,y),F''_{xx}(x,y)=-F''_{yy}(x,y)$

(4) $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+cosx)}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{ln(1+x)}{1+cosx}dx$，$I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+sinx}dx$,则（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$.

(B) $I_2<I_1<I_3$.

(C) $I_1<I_3<I_2$

(D) $I_3<I_2<I_1$

考途
考路艰辛，征途有我

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是

（　　）

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为（　　）

(A) 无解　　(B) 有解

(C) 有无穷多解或无解　　(D) 有唯一解或无解

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则的取值范围是（　　）

(A) $\{0,1\}$

(B) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

(C) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$

(D) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,4),Y\sim B(3,\frac{1}{3})$，且 X 与 Y 不相关，则 $D(X-3Y+1)=$（　　）

(A) 2．　(B) 4．　(C) 6．　(D) 10．

(9) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，X_i 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\0, & \text{其他.}\end{cases}$，则

考途
考路艰辛，征途有我

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于(　　)

(A) $\frac{1}{8}$.　(B) $\frac{1}{6}$.　(C) $\frac{1}{3}$.　(D) $\frac{1}{2}$

(10) 二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

已知事件$\{\max(X,Y)=2\}$与事件$\{\min(X,Y)=1\}$相互独立，则$Cov(X,Y)=$(　　)

(A) -0.6.

(B) -0.36.

(C) 0.

(D) 0.48.

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$_____。

(12) $\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=$_____

(13) 设$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，$f'''(2\pi)=$

(14) $f(x)=\begin{cases}e^x,0\le x\le 1\\0,\text{其他}\end{cases}$,求$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$_____.

(15) 已知$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$第 2 行与第 3 行互换，再将第 2 列的-1 倍加到第 1 列得矩阵$\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$为$\boldsymbol{A}$的逆，则$tr(\boldsymbol{A}^{-1})=$____

(16) 设A,B,C为随机事件,且A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立,

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,则$P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=$_____.

考途
考路艰辛，征途有我

三、解答题：17～22 小题,共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

某单位产品产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，销售单价 p 与 Q 的关系 $p=1160-1.5Q$.若单位资本投入和劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

(19) (本题满分 12 分)

已知区域 D 为 $\left\{(x,y)\middle| y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型为标准型；

（2） （2）证明 $\min\limits_{x\neq 0}\frac{f(x)}{x^Tx}=2$.

(22) (本题满分 12 分)

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$， $Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

考途
考路艰辛，征途有我

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三)试题

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

（1）$x\to 0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下 4 个命题：

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$;

②若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$;

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

其中真命题是：（　　）

（A）①③.　　（B）①④.

（C）①③④.　　（D）②③④.

【答案】（C）.

【解析】

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\cdot 1=1$，①正确.

②错，反例 $\alpha(x)=x,\beta(x)=-x$;

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0$，因此 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，③正确.

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，即 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，④正确.

因此真命题有①③④，选 C.

（2）已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}$，$(n=1,2,\cdots,n)$，则（　　）

（A）有最大值，有最小值.

（B）有最大值，没有最小值.

（C）没有最大值，有最小值.

（D）没有最大值，没有最小值.

【答案】（A）.

【解析】

考途
考路艰辛，征途有我

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，因此$\sqrt[n]{n}$必有界.且根据$\sqrt[x]{x}$的单调性可得$x<e$时单增，$x>e$时单减，因此下界是1，$\sqrt[2]{2}$和$\sqrt[3]{3}$是最大的两个值，对于数列$a_n$来说，$a_1=1+1=2$，$a_2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$，当$n>3$时，$\sqrt[3]{3}$在$\sqrt[n]{n}$中取最大值，$-\frac{(-1)^3}{n}=\frac{1}{3}$在$-\frac{(-1)^n}{n}$中取最大值，所以必有最大值，排除（C）（D）.

再考虑是否有最小值，只有n为偶数时才有可能成为最小值，接下来证明当$n\geqslant 3$时，$\sqrt[n]{n}-\frac{1}{n}>1$，即证$n^{\frac{1}{n}+1}-1>n$，即证$n^{n+1}>(n+1)^n$.可以利用单调性，证明$b>a>e$时，$a^b>b^a$，因此$n\geqslant 3$，可得$n^{n+1}>(n+1)^n$，即$n\geqslant 3$时，$\sqrt[n]{n}-\frac{1}{n}>1$成立.因此仅当$n=2$时，$a_2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$为最小值.

因此选（A）.

（3）$f(t)$连续，$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$,则（　　）

（A）$F_x'(x,y)=F_y'(x,y),F_{xx}''(x,y)=F_{yy}''(x,y)$.

（B）$F_x'(x,y)=F_y'(x,y),F_{xx}''(x,y)=-F_{yy}''(x,y)$.

（C）$F_x'(x,y)=-F_y'(x,y),F_{xx}''(x,y)=F_{yy}''(x,y)$

（D）$F_x'(x,y)=-F_y'(x,y),F_{xx}''(x,y)=-F_{yy}''(x,y)$

【答案】（C）.

【解析】

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$$

$$=x\int_0^{x-y}f(t)dt-y\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}tf(t)dt$$

$$\therefore\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)dt+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)$$

$$=\int_0^{x-y}f(t)dt$$

$$\therefore\frac{\partial F}{\partial y}=-x\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}f(t)dt+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)$$

$$=-\int_0^{x-y}f(t)dt$$

$$\therefore\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$$

考途
考路艰辛，征途有我

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y),\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y),\therefore\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

综上，正确选项为（C）.

（4）$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$,则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3.$　　（B）$I_2<I_1<I_3.$

（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_3<I_2<I_1$

【答案】（A）.

【解析】比较I_1,I_2,令$f(x)=\frac{x}{2}-\ln(1+x),x\in(0,1)$则

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}<0,x\in(0,1)$,又$f(0)=0$,所以$f(x)<f(0)=0$,$I_1<I_2$;

再比较I_2,I_3,令

$$g(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}-\frac{2x}{1+\sin x}=\frac{\ln(1+x)(1+\sin x)-2x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\sin x)},$$

$$h(x)=\ln(1+x)(1+\sin x)-2x(1+\cos x)$$

$$=\ln(1+x)-x+\sin x\cdot\ln(1+x)-x-2x\cos x,x\in(0,1)$$

其中

$\ln(1+x)-x<0,\ \sin x\cdot\ln(1+x)-x<0,\ -2x\cos x<0$,则$I_2<I_3$，故选(A).

（5）设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是

（　　）

（A）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$

（B）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$

（C）存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$

（D）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

【答案】（B）

【解析】$\boldsymbol{A}$有3个不同特征值,故$\boldsymbol{A}$一定可以对角化$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$.

考途
考路艰辛，征途有我

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为（　　）

（A）无解　　（B）有解

（C）有无穷多解或无解　　（D）有唯一解或无解

【答案】（D）

【解析】根据非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解判别的充要条件：系数矩阵秩与增广矩阵秩的关系当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},b)=n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

当 $r(\boldsymbol{A})=r(A,b)<n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

当 $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},b)$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解；

$$(\boldsymbol{A},b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 或 $b=1$ 时，此时方程组无解；

当 $a\neq1$ 且 $b\neq1$ 时，原式化简为 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a+1&\dfrac{1}{a-1}\\0&0&b-a&\dfrac{3}{b-1}-\dfrac{1}{a-1}\end{pmatrix}$

当 $a=b$ 时，$\dfrac{3}{b-1}-\dfrac{1}{a-1}\neq0$，$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},b)$，此时方程组无解；

当 $a\neq b$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},b)=3$，此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解。

故答案选（D）

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则的取值范围是（　　）

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　（D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

【答案】（C）

考途
考路艰辛，征途有我

【解析】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$等价，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

当$\lambda=-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$与向量组等价矛盾，故$\lambda\neq-1$

当$\lambda=-2$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$与向量组等价矛盾，故$\lambda\neq-2$

故排除B,D；当$\lambda=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，故排除$A$，于是该题选择$C$.

(8) 设随机变量$X\sim N(0,4),Y\sim B(3,\frac{1}{3})$,且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$（　　）

（A）2.　（B）4.　　（C）6.　　（D）10.

【答案】（D）

【解析】$D(X-3Y+1)=D(X)+9D(Y)$

由$X\sim N(0,4),Y\sim B(3,\frac{1}{3})$知，$D(X)=4,D(Y)=\frac{2}{3}$,故$D(X-3Y+1)=10$,选D.

(9) 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布,X_i的概率密度$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$,则

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于(　　)

（A）$\frac{1}{8}$.（B）$\frac{1}{6}$.（C）$\frac{1}{3}$.（D）$\frac{1}{2}$

【答案】（B）

【解析】由辛钦大数定律知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$E(X^2)$.

由于$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2(1-|x|)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$,故选B.

(10) 二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
−1	0.1	0.1	b

考途
考路艰辛，征途有我

1	a	0.1	0.1

已知事件$\{\max(X,Y)=2\}$与事件$\{\min(X,Y)=1\}$相互独立，则$Cov(X,Y)=$（　　）

（A）-0.6.　　（B）-0.36.

（C）0.　　（D）0.48.

【答案】（B）

【解析】

令事件$A=\{\max(X,Y)=2\}$,$B=\{\min(X,Y)=1\}$,则

$P(A)=P\{X=-1,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}=b+0.1$

$P(B)=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=0.2$，

$P(AB)=P\{X=1,Y=2\}=0.1$

因为事件A,B独立，所以$P(AB)=P(A)P(B)$，即

$(b+0.1)\times 0.2=0.1$，又由规范性知$a+b=0.6$，则可得$a=0.2,b=0.4$，所以X的边缘分布律为

X	-1	1
P	0.6	0.4

Y的边缘分布律为

Y	0	1	2
P	0.3	0.2	0.5

则$E(X)=-1\times 0.6+1\times 0.4=-0.2$ $E(Y)=0\times 0.3+1\times 0.2+2\times 0.5=1.2$

$E(XY)=-1\times 0.1+(-2)\times 0.4+1\times 0.1+2\times 0.1=-0.6$

所以$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.36$.

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{2}\right)^{\cot x}=$_____。

【答案】$\sqrt{\mathrm{e}}$

【解析】

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^{x}}{2}\right)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)}$，

考途
考路艰辛，征途有我

$$\lim_{x\to 0}\cot x\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^x}{2}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以原式=$\sqrt{e}$.

（12）$\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=$_____

【答案】 $\ln 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

【解析】

$$\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=\int_0^2\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx-\int_0^2\frac{6}{x^2+2x+4}dx$$

$$=\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2-6\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2+3}dx$$

$$=\ln 12-\ln 4-\frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^2$$

$$=\ln 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

（13）设 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$， $f'''(2\pi)=$_____.

【答案】 0

【解析】

$f(x)$ 为周期为 2π 的偶函数， $f'''(x)$ 为周期为 2π 的奇函数， $f'''(2\pi)=f'''(0)=0$.

（14） $f(x)=\begin{cases}e^x,0\leqslant x\leqslant 1\\0,\text{其他}\end{cases}$,求 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$_____.

【答案】 e^2-2e+1.

【解析】 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=\int_0^1dx\int_x^{x+1}e^xe^{y-x}dy$

$$=\int_0^1dx\int_x^{x+1}e^ydy=\int_0^1e^{x+1}-e^xdx=e^2-2e+1.$$

(15) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 第 2 行与第 3 行互换，再将第 2 列的-1 倍加到第 1 列得矩阵

$\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，则 $tr\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)=$____

考途
考路艰辛，征途有我

【答案】-1

【解析】由题可设 $B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

则 $E_{23}AE_{21}(-1)=B$，$A=E_{23}^{-1}BE_{21}^{-1}(-1)=E_{23}\mathrm{B}E_{21}(1)$

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&0&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-1)}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

即 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$

$$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1&0&0\\-1&0&0&0&1&0\\0&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\-1&1&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\0&1&-1&1&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$，故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，

故 $tr\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)=-1$

(16) 设 A,B,C 为随机事件,且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立,

$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=$_____.

【答案】$\dfrac{5}{8}$

【解析】$P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=\dfrac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$

由 B 与 C 相互独立知,

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)=\dfrac{5}{9}$,

又 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容,

考途
考路艰辛，征途有我

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)=\frac{8}{9},$$

得$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=\frac{5}{8}$.

三、解答题：17～22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数$y(x)$是微分方程$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$的满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的渐近线.

【答案】斜渐近线$y=2x$.

【解析】$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}\left[\int\left(2+\sqrt{x}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=2x+C\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

将$y(1)=3$代入可得$C=\mathrm{e}$，即$y=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\ (x>0)$.

由函数解析式可知，曲线没有垂直渐近线；

又由于$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\right)=+\infty$，

曲线没有水平渐近线；

又$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y(x)-kx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}-2x\right)=0$，

故曲线有斜渐近线$y=2x$.

（18）(本题满分 12 分)

某单位产品产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量y决定，生产函数$Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，销售单价$p$与 Q 的关系$p=1160-1.5Q$.若单位资本投入和劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

【答案】384.

【解析】

由题意得利润函数$L=pQ-6x-8y=(1160-1.5Q)Q-6x-8y$，化简得

考途
考路艰辛，征途有我

$L=13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216xy^{\frac{1}{3}}-6x-8y$.

由 L 分别对 x 和 y 求偏导并令其为零：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=6960x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216y^{\frac{1}{3}}-6=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2320x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}}-72xy^{-\frac{2}{3}}-8=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=256\\ y=64\end{cases}$

此时利润最大，利润最大时的产量 $Q=384$.

（19）(本题满分 12 分)

已知区域 D 为 $\left\{(x,y)\middle|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【答案】 $2\pi-2$.

【解析】 设区域 D 的面积为 S_D，

$$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=S_D-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2+\pi-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将直角坐标化为极坐标后，有

$$\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sin 2\theta\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}r\sin 2\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2\theta\mathrm{d}\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{1-\sin 2\theta}-1\right)\mathrm{d}\theta=2-\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1-\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2-\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1-\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta=2-\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-2\tan\theta}\mathrm{d}\theta$$

考途
考路艰辛，征途有我

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{(\tan\theta-1)^2}\mathrm{d}\tan\theta=2-\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{(\tan\theta-1)^2}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=2-\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{(\tan\theta-1)^2}\mathrm{d}\tan\theta+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{1}{(\tan\theta-1)^2}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=2-\pi-\frac{2}{\tan\theta-1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{2}{\tan\theta-1}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=4-\pi$$

所以 $I=2-\pi-(4-\pi)=2\pi-2$.

(20) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

【答案】 收敛域 $[-1,1]$,

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right), & x\in[-1,0)\cup(0,1].\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

【解析】（1）设 $u_n(x)=\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$,

则 $x\in(-1,1)$，收敛区间为 $(-1,1)$,

当 $x=\pm1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}$ 收敛，则收敛域为 $[-1,1]$

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 记

$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n}$, $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$.

关于 $S_1(x)$，当 $x=0$ 时， $S_1(x)=1$.

当 $x\neq0$ 时， $S_1(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$,

记 $S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$,

考途
考路艰辛，征途有我

则 $S_3'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$，$S_3(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+S_3(0)=\arctan x.$

$$S_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1].\\ 1\quad , & x=0.\end{cases}$$

关于 $S_2(x)$，当 $x=0$ 时，$S_2(x)=1.$

当 $x\neq 0$ 时，$S_2(x)=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$，

记 $S_4(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$，

则 $S_4'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\frac{2}{4-x^2}$，$S_4(x)=\int_0^x\frac{2}{4-t^2}\mathrm{d}t+S_4(0)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|.$

$$S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right), & x\in[-1,0)\cup(0,1].\\ 1\quad , & x=0.\end{cases}$$

则 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right), & x\in[-1,0)\cup(0,1].\\ 2, & x=0.\end{cases}$

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型为标准型；

（2）证明 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

【答案】（1）$Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

考途
考路艰辛，征途有我

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3 \end{cases}$$

$f(x) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$.

（2）$\min\limits_{x \neq 0} \dfrac{f(x)}{x^T x} = \dfrac{2y^T y}{y^T y} = 2$

【解析】

（1）$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_3$，

二次型矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 (\lambda - 2)$$

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 时，$(4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})x = 0$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,1)^T$

当 $\lambda_3 = 2$ 时，$(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})x = 0$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,0,-1)^T$.

将 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,1)^T, \boldsymbol{\xi}_3 = (1,0,-1)^T$ 正交单位化得

$\boldsymbol{\eta}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 可得 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3 \end{cases}$$

$f(x) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$

考途
考路艰辛，征途有我

(2) 由（1）知 $f(x)=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$， $x=Qy$，故 $x^{\mathrm{T}}x=y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Qy=y^{\mathrm{T}}y$

故 $\dfrac{f(x)}{x^{\mathrm{T}}x}=\dfrac{g(y)}{y^{\mathrm{T}}y}=\dfrac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

$=2+\dfrac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant 2$

当 $y_1=y_2=0, y_3\neq 0$ 时，可取到最小值 2 .

所以存在非零向量 y，即存在非零向量 x，使得 $\dfrac{f(x)}{x^Tx}$ 取到最小值 2 .得证.

(22) (本题满分 12 分)

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$， $Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

【答案】 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n+m}(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j);\dfrac{1}{n+m}\theta^2$

【解析】（1）由题意得， $\lambda_x=\dfrac{1}{\theta}$， $\lambda_y=\dfrac{1}{2\theta}$,

则 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}y} & y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

设 $x_1,x_2,\cdots x_n,y_1,y_2,\cdots y_m$ 为 $X_1,X_2,\cdots X_n,Y_1,Y_2,\cdots Y_m$ 的样本观察值，则

$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f_X(x_i)\prod\limits_{j=1}^{m}f_Y(y_j)$

当 $x_i>0, y_j>0$ 时,

$L(\theta)=\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)^m\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}=2^{-m}\theta^{-(n+m)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}$

$LnL(\theta)=-m\ln 2-(n+m)\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\dfrac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j$

令 $\dfrac{dLnL(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n+m}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{1}{2\theta^2}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j=0$,

考途
考路艰辛，征途有我

得θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j)$.

（2） $D(\hat{\theta})=D\left[\frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j)\right]$

$$=\frac{1}{(n+m)^2}[nD(X_i)+\frac{1}{4}mD(Y_j)]$$

$$=\frac{1}{(n+m)^2}\left(n\theta^2+\frac{1}{4}m4\theta^2\right)=\frac{1}{n+m}\theta^2$$

考途
考路艰辛，征途有我