(13) 设平面区域 $D$ 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 $y$ 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$ ______.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 $f$ 的正惯性指数为______.

## 三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$,试求 $\alpha$ 的取值范围.

(16) (本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定,求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17) (本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 $f$ 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l$：$y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点. 记 $\alpha$ 为曲线 $l$ 在点 $(x, y)$ 处切线的倾角，若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：对任意的正整数 $n$，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立；

（Ⅱ）设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

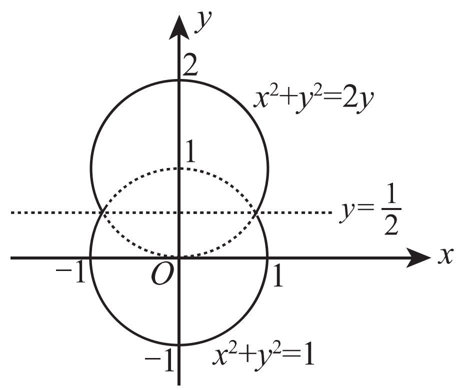
(20)（本题满分 11 分）

一容器的内侧是由图中曲线绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y\ \left(y \geq \frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2 + y^2 = 1\ \left(y \leq \frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

（Ⅰ）求容器的容积；

（Ⅱ）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 $g\ \mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$）



(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$, $\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$,其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,计算二重积分 $I = \iint\limits_{D} xyf''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (3, 4, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 $a$ 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

# 2011 年真题参考答案

## 一、选择题

(1) C.　(2) B.　(3) C.　(4) C.　(5) A.　(6) B.　(7) D.　(8) D.

## 二、填空题

(9) $\sqrt{2}$.　(10) $e^{-x}\sin x$.　(11) $\ln(\sqrt{2}+1)$.　(12) $\frac{1}{\lambda}$.　(13) $\frac{7}{12}$.　(14) 2.

## 三、解答题

(15) $1<\alpha<3$.

(16) 极大值 $y(-1)=1$，极小值 $y\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，凹区间 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，凸区间 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，拐点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(17) $f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)$.

(18) $y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) $\frac{9\pi}{4}(\mathrm{m}^3)$.

(Ⅱ) $\frac{27\times 10^3}{8}\pi g(\mathrm{J})$.

(21) $a$.

(22) (Ⅰ) $a=5$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(23) (Ⅰ) 特征值 $-1,1,0$，分别对应特征向量 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意非零常数.

(Ⅱ) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.