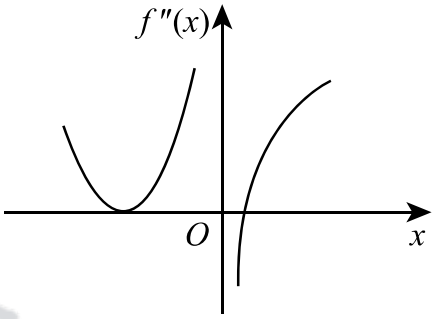
2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解,则(　　)

(A)$a=-3,b=2,c=-1$.　　(B)$a=3,b=2,c=-1$.

(C)$a=-3,b=2,c=1$.　　(D)$a=3,b=2,c=1$.

(3)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的(　　)

(A)收敛点,收敛点.　　(B)收敛点,发散点.

(C)发散点,收敛点.　　(D)发散点,发散点.

(4)设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$(　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$.　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　　(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$.　　(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　　)

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件,则(　　)

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D)$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

考途
考路艰辛，征途有我

(8)设随机变量 X,Y 不相关,且 $E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$,则 $E[X(X+Y-2)]=$(　　)

(A) -3.　　(B) 3.　　(C) -5.　　(D) 5.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$_____.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$_____.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定,则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$_____.

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域,则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=$_____.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$_____.

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$_____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a,b,k 值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0)=2$,求 $f(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$,曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$,求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

考途
考路艰辛，征途有我

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$,计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

考途
考路艰辛，征途有我

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

考途
考路艰辛，征途有我

2015年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) C

解　由二阶导函数 $\overline{y}=f''(x)$ 的图形可知，二阶导数为零的点有两个，而 $x=0$ 则是二阶导数不存在的点.

在二阶导数为零的点中只有一个点左、右两侧二阶导数的符号相反，因此对应曲线 $y=f(x)$ 上一个拐点.

在 $x=0$ 左侧，$f''(x)$ 为正，在 $x=0$ 右侧，$f''(x)$ 为负，因曲线 $y=f(x)$ 上点 $(0,f(0))$ 也是一个拐点.

故曲线 $y=f(x)$ 共有 2 个拐点，故应选 C.

(2) A

解　由题设条件知，$y_1=\frac{1}{2}e^{2x}$，$y_2=-\frac{1}{3}e^{x}$ 是已知二阶常系数非齐次线性微分方程所对应的齐次微分方程的两个特解，由此知 $r_1=2$，$r_2=1$ 是特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的两个根.

由一元二次方程根与系数的关系，得 $a=-(2+1)=-3$，$b=2$，

于是原方程化为 $y''-3y'+2y=ce^{x}$，

由二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构知：$y_3=xe^{x}$ 是原方程的一个特解，将 $y_3=xe^{x}$ 代入 $y''-3y'+2y=ce^{x}$ 中，得 $c=-1$，即 $a=-3$，$b=2$，$c=-1$.故应选 A.

(3) B

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，因此该级数的收敛半径 $R=1$，收敛区间为：$(-1,1)$；

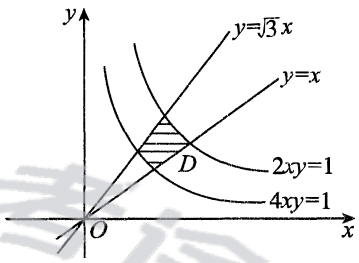
根据收敛半径 R 的计算定理，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径也是 $R=2$，而其收敛区间为：$(0,2)$；

而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 可视为由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 逐项求导所得，根据幂级数的性质知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间仍是 $(0,2)$，因为 $\sqrt{3}\in(0,2)$，所以 $x=\sqrt{3}$ 是收敛点.

而 $x=3$ 不属于 $(0,2)$，由数项级数收敛与发散的定义知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n2^n$ 发散，即 $x=3$ 是发散点.

(4) B

解　如右图示，在极坐标系中积分区域 D 为：



$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}\right\},$$

于是有 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.故应选 B.

(5) D

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-2)(a-1)(2-1)=(a-2)(a-1).$$

考途
考路艰辛，征途有我

由线性方程组有无穷多解，得$|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即 $d=1$ 或 $d=2$.

同理，当 $a=2$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，如 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即 $d=1$ 或 $d=2$.　故应选 D.

(6) A

解
$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

又因为
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

故应选 A.

(7) C

解　对于 A,B 选项：

当事件 A 与 B 独立时，$P(AB)=P(A)P(B)$.

而当 A,B 不独立时，$P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 没有确定的关系，所以 A,B 选项错误.

对于 C,D 选项：

由概率性质 $P(A)\geqslant P(AB)$，$P(B)\geqslant P(AB)$，两式相加，得

$P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB)$，即 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.故应选 C.

(8) D

解　因为 X,Y 不相关，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)=EX\cdot EY=0$，即 $E(XY)=EX\cdot EY$，

则
$$E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2EX$$
$$=[DX+(EX)^2]+EX\cdot EY-2EX=5.$$

二、填空题

(9) $-\dfrac{1}{2}$

解　利用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

考途
考路艰辛，征途有我

(10) $\frac{\pi^2}{4}$

解 因为$\frac{\sin x}{1+\cos x}$为奇函数，$|x|$是偶函数，且积分区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$关于原点对称，所以由奇、偶函数在对称区间上的定积分性质得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

(11) $-\mathrm{d}x$

解 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$F'_x=yz+1-\sin x$；$F'_y=xz$；$F'_z=\mathrm{e}^z+xy$，

将 $x=0,y=1$ 代入已知方程得，$\mathrm{e}^z=1\Rightarrow z=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{(0,1,0)}=-\frac{yz+1-\sin x}{xy+\mathrm{e}^z}\Big|_{(0,1,0)}=-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{(0,1,0)}=-\frac{xz}{xy+\mathrm{e}^z}\Big|_{(0,1,0)}=0,$$

于是由公式得 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$.

(12) $\frac{1}{4}$

解 利用轮换对称性知：$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V$，于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=6\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=3\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x\\&=3\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(13) $2^{n+1}-2$

解 第 i 行的$\frac{1}{2}$倍加到第 $i+1$ 行，$i=1,2\cdots,n-1$.

$$\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\0&2&\cdots&0&2+2\times\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2+2\times\frac{1}{2}+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\0&0&\cdots&0&2+2\times\frac{1}{2}+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&&&2\\&2&&2+2\times\frac{1}{2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&2\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\end{vmatrix}=2^{n+1}-2.$$

考途
考路艰辛，征途有我

(14) $\frac{1}{2}$

解 由于相关系数为0,所以 X,Y 都服从正态分布,即 $X\sim N(1,1)$,$Y\sim N(0,1)$,且 X 和 Y 相互独立.

由 $X\sim N(1,1)$,可得 $X-1\sim N(0,1)$,所以

$$\begin{aligned}P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}\\&=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\}\\&=P\{X-1<0\}P\{Y>0\}+P\{X-1>0\}P\{Y<0\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题

(15) **解** 由于 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$,

所以
$$\begin{aligned}f(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x\\&=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o(x^3)\\&=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)=kx^3$ 在 $x\to 0$ 时等价,所以 $\begin{cases}1+a=0,\\ b-\frac{a}{2}=0,\\ k=\frac{a}{3}.\end{cases}$

解得 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$.

(16) **解** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),$$

该切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$.

根据题设条件可知 $\frac{1}{2}\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4$,

即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\frac{1}{8}y^2$.

解得 $y=-\frac{8}{8C+x}$.

因为 $f(0)=2$,所以 $C=-\frac{1}{2}$.

故 $f(x)=\frac{8}{4-x}$,$x\in I$.

(17) **解** 因为函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大,且最大方向导数是该点梯度向量的长度,而

考途
考路艰辛，征途有我

$$\mathbf{grad}f(x,y)=(1+y,1+x),\ |\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2},$$

因此，问题转化为求 $\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$，由

$$\begin{cases}F'_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0,\\F'_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

又 $|\mathbf{grad}f(1,1)|=2\sqrt{2}$,

$|\mathbf{grad}f(-1,-1)|=0$,

$|\mathbf{grad}f(2,-1)|=|\mathbf{grad}f(-1,2)|=3$,

所以 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

(18) **解** （Ⅰ）因为函数 $u(x),v(x)$ 可导，所以

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}=u'(x),\ \lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}=v'(x),\ 且\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)=v(x).$$

从而

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]'&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)v(x+\triangle x)-u(x)v(x)}{\triangle x}\\&=\lim_{\triangle x\to 0}\left[\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}v(x+\triangle x)+u(x)\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\right]\\&=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)+u(x)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

（Ⅱ）

$$f'(x)=u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x).$$

(19) **解** 设 L_1 是从点 B 到点 A 的直线段，$\sum$ 为平面 $z=x$ 上由 L 与 L_1 围成的半圆面下侧，其法向量的方向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

由 Stokes 公式

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\sum}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z^2-x^2+y & x^2y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\sum}(2x^2y+1)\mathrm{d}S.$$

由于曲面 $\sum$ 关于 xOz 平面对称，所以 $\iint_{\sum}2x^2y\mathrm{d}S=0$，故

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\sum}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

考途
考路艰辛，征途有我

又 L_1 的参数方程为 $x=0$，$y=y$，$z=0$（y 从 $-\sqrt{2}$ 到 $\sqrt{2}$），所以

$$\int_{L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}y\mathrm{d}y=0\ .$$

因此 $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

(20) **解** （Ⅰ）由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

且 $|\boldsymbol{P}|=4\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}$，则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

所以

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

对 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-k\end{pmatrix},$$

所以当 $k=0$ 时，方程组 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，且所有非零解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}，c\text{ 为任意非零常数}.$$

故在两个基下坐标相同的所有非零向量为

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}c\\0\\-c\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)，c\text{ 为任意非零常数}.$$

(21) **解** （Ⅰ）由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})，|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|，$$

于是

$$3+a=2+b，2a-3=b，$$

解得

$$a=4，b=5.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

考途
考路艰辛，征途有我

当 $\lambda_3=5$ 时，解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵.

(22) **解** （Ⅰ）每次观测中，观测值大于 3 的概率为

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2,\ k=2,3,\cdots.$$

（Ⅱ）

$$\begin{aligned}EY&=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=16.\end{aligned}$$

(23) **解** （Ⅰ）由于总体 X 服从区间 $[\theta,1]$ 上的均匀分布，所以

$$EX=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

（Ⅱ）记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n),\\0, & \text{其他}\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\\0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

由此可知，当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

考途
考路艰辛，征途有我