2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ (　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(2) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是(　　)

(A)$(-\infty, -4)$.　　(B)$(4, +\infty)$.

(C)$\{-4, 4\}$.　　(D)$(-4, 4)$.

(3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$,则 a、b、c 依次为(　　)

(A)1, 0, 1.　　(B)1, 0, 2.　　(C)2, 1, 3.　　(D)2, 1, 4.

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛,则(　　)

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛.　　(B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛.

(C)$\sum (u_n + v_n)$ 收敛.　　(D)$\sum (u_n + v_n)$ 发散.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(\boldsymbol{A}^*) =$ (　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}| = 4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为(　　)

(A)$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B)$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C)$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D)$-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(7) 设 A, B 为随机事件,则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A)$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.　　(B)$P(AB) = P(A)P(B)$.

(C)$P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$.　　(D)$P(AB) = P(A\,B)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则 $P\{|X - Y| < 1\}$(　　)

(A) 与 μ 无关,而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.　　(D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right]^n =$

(10) 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为

(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\,dt$,则 $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx =$.

考途
考路艰辛,征途有我

(12) 以 P_A、P_B 分别表示 A、B 两个商品的价格，设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$，则当 $P_A = 10$，$P_B = 20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA} > 0) =$ _____.

(13) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $a =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$. 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$；

(Ⅱ) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

考途
考路艰辛，征途有我

(18)(本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x}\sin x(x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(19)(本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(Ⅰ)证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n = 2, 3, \cdots)$;

(Ⅱ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知向量组 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 \begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$ 与 Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价,求 a 的取值,并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

考途
考路艰辛,征途有我

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(Ⅰ)求 x,y;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 服从参数为 1 的指数分布,Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$,$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度;

(Ⅱ)p 为何值时,X 与 Z 不相关;

(Ⅲ)X 与 Z 是否相互独立?

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数,$\sigma>0$ 是未知参数,A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 A;

(Ⅱ)求 σ^2 的最大似然估计量.

考途
考路艰辛,征途有我

2019 年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) C

解 $\tan x$ 的麦克劳林展开式为 $x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,

故 $x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$,则 $k=3$. 故应选 C.

(2) D

解 设 $f(x)=x^5-5x+k$,则 $f'(x)=5x^4-5$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$;当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,结合单调性知,$f(-1)>0$,$f(1)<0$ 时才有三个根,

且三个实根分别在区间 $(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$ 上,

即 $f(-1)=-1+5+k>0$,$f(1)=1-5+k<0$,则 $-4<k<4$. 故应选 D.

(3) D

解 由微分方程通解形式可知,$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$ 为齐次方程的通解,

$y=e^x$ 为非齐次方程的特解,-1 为特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的二重根,

得 $\begin{cases}1-a+b=0,\\ a^2-4b=0,\end{cases}$ 且 $1+a+b=c$,

由此解得 $a=2$,$b=1$,$c=4$. 故应选 D.

(4) B

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{|nu_n|}=0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛,由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也绝对收敛.

而当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n}{n}$ 条件收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_n$ 的敛散性不定.

如果令 $\nu_n=(-1)^n$ 及 $\nu_n=\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n}{n}$ 都是条件收敛,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_n=(-1)^n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\nu_n)$ 的敛散性是不确定的.

则 C、D 都不正确.

再判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\nu_n$ 的敛散性:由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n\nu_n|}{|nu_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\nu_n}{n}\right|=0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛,由比较判别法

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\nu_n$ 是绝对收敛的. 故应选 B.

(5) A

解 由线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $2=4-r(\boldsymbol{A})$,故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

由于当 $r(\boldsymbol{A})<n-1$ 时(n 为 $\boldsymbol{A}$ 的阶数),$r(\boldsymbol{A}^*)=0$. 故应选 A.

(6) C

解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,根据 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 得:$\lambda^2+\lambda=2$,解得 $\lambda=1$ 或 -2.

考途
考路艰辛,征途有我

由于 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个特征值且 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值的积为 $|\boldsymbol{A}|$ 的值，

故 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值的积为 1，－2，－2，正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，

故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故应选 C.

(7) C

解 由 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 得

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$.

故应选 C.

(8) A

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立，

则 $E(X-Y)=0$，$D(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$，得 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

故 $P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\dfrac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$ 与 σ^2 有关，与 μ 无关.

故应选 A.

二、填空题

(9) e^{-1}

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]^n$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$.

故应填 e^{-1}.

(10) $(\pi,-2)$

解 $y'=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$，

$y''=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\pi$，再判断 x_1，x_2 两点的左右两侧二阶导数是否异号；

在 x_1 左侧 $y''<0$，右侧 $y''<0$，故 $(0,2)$ 不是拐点；

x_2 左侧 $y''<0$，x_2 右侧区间 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内 $y''>0$，所以拐点为 $(\pi,-2)$.

故应填 $(\pi,-2)$.

(11) $\dfrac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$

解 由分部积分法：$\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\dfrac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x$，　①

又 $f(1)=\int_1^1\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t=0$，$f'(x)=\sqrt{1+x^4}$，代入 ① 式：

$$\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x^4$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

考途
考路艰辛，征途有我

故应填 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

(12) 0.4

解 当 $P_B=20$ 时，$Q_A=500-P_A^2-20P_A+2\cdot 20^2=1300-20P_A-P_A^2$，

则 $\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}P_A}=-\frac{P_A}{1300-20P_A-P_A^2}\cdot(-20-2P_A)=\frac{2P_A(P_A+10)}{1300-20P_A-P_A^2}$，

所以 $\eta_{AA}\Big|_{P_A=10}=0.4$. 故应填 0.4.

(13) 1

解 由题意得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{array}\right).$$

要使 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则应使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，

当 $a^2-1=a-1=0$，即 $a=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$.

故应填 1.

(14) $\frac{2}{3}$

解 由随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 可知 X 的分布函数

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases} EX=\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}$$

$$=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

三、解答题

(15) **解** 当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$，所以 $f'(0)$ 不存在.

综上 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ \mathrm{e}^x(x+1), & x<0.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-1, x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x<-1$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)<0$；

考途
考路艰辛，征途有我

当 $-1<x<0$ 或 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内单调减少，

在区间 $(-1,0)$ 和 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 内单调增加，从而 $f(x)$ 的极小值为

$f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值为 $f(0)=1$.

(16) **解** 因为

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_u(x+y,x-y)-f_v(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_u(x+y,x-y)+f_v(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{uu}(x+y,x-y)-2f_{uv}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{uu}(x+y,x-y)+f_{vv}(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{uu}(x+y,x-y)+2f_{uv}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{uu}(x+y,x-y)-f_{vv}(x+y,x-y).$$

(17) **解** (Ⅰ) 由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=e^{\int x\,dx}\left(C+\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\int x\,dx}\,dx\right)=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C).$$

因为 $y(1)=\sqrt{e}$，所以 $C=0$.

从而 $y(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$.

(Ⅱ) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\int_1^2\pi y^2(x)\,dx=\int_1^2\pi x e^{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e).$$

(18) **解** 由题意，所求面积为

$$S=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,|\sin x|\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx,$$

因为
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=(-1)^n[e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi}]-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx.$$

得
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{(-1)^n}{2}[e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi}]$$

所以
$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi}]=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}.$$

考途
考路艰辛，征途有我

(19) **解** (Ⅰ)$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

因为在积分区间$[0,1]$上,$x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$且不恒等于0,

所以$a_{n+1}-a_n<0$,即$\{a_n\}$单调减少.

当$n\geqslant 2$时,因为$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n,$$

所以 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

(Ⅱ)$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

因为$\{a_n\}$单调减少且$a_n>0$,所以$\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(20) **解** 由等价的定义可知:

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$都能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,则有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,

对$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$作初等行变换可得:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&1\\1&0&2&\vdots&1&2&3\\4&4&a^2+3&\vdots&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&1\\0&-1&1&\vdots&0&2&2\\0&0&a^2-1&\vdots&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

当$a=-1$时,有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$;

当$a=1$时,有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$;

可知$a\neq 1$且$a\neq -1$时,此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$,

则有$a=1$或者$a\neq 1$且$a\neq -1$时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,

此时,要保证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

对$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$作初等行变换可得:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&1&1&1\\1&2&3&\vdots&1&0&2\\a+3&1-a&a^2+3&\vdots&4&4&a^2+3\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&1&1&1\\0&2&2&\vdots&0&-1&1\\0&0&a^2-1&\vdots&1-a&\frac{3}{2}(1-a)&\frac{2a^2-a-1}{2}\end{pmatrix}$$

当$a=1$时,有$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,

可知当$a\neq 1$且$a\neq -1$时,此时$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,

此时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示.

考途
考路艰辛,征途有我

综上所述：当 $a\neq -1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可相互线性表示.

当 $a\neq 1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$

则 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$

基础解系为 $k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}(k\in\mathbf{R})$，则 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21) **解** （Ⅰ）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，

即 $\begin{cases}x-4=y+1,\\4x-8=-2y,\end{cases}$ 解得 $x=3,y=-2$.

（Ⅱ）矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)$，

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,-1,-2$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $2,-1,-2$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\xi_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\xi_3=(1,-2,-4)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $\eta_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\eta_2=(1,-3,0)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\eta_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

记 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，于是 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22) **解** （Ⅰ）Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\mid Y=-1\}P\{Y=-1\}+P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}P\{Y=1\}\\&=pP\{-X\leqslant z\}+(1-p)P\{X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

考途
考路艰辛，征途有我

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=pP\{X\geqslant -z\}+(1-p)\cdot 0=pe^z$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p\cdot 1+(1-p)P\{X\leqslant z\}=1-(1-p)e^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}pe^z, & z<0,\\ (1-p)e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

（Ⅱ）$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-EX\cdot EZ\\ &=E(X^2Y)-EX\cdot E(XY)\\ &=E(X^2)\cdot E(Y)-(EX)^2\cdot E(Y)\\ &=DX\cdot EY=1-2p,\end{aligned}$

令 $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，得 $p=\frac{1}{2}$. 所以 $p=\frac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（Ⅲ）因为

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0$，

$P\{X\leqslant 1\}>0, P\{Z\leqslant -1\}>0$，

所以

$P\{X\leqslant 1,Z\leqslant -1\}\neq P\{X\leqslant 1\}P\{Z\leqslant -1\}$.

故 X 与 Z 不相互独立.

(23) **解** （Ⅰ）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;\sigma^2)\mathrm{d}x=1$，得

$$1=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=A\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=A\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,$$

所以 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$，得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

所以 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

考途
考路艰辛，征途有我