2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = ($　　$)$

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(2) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是(　　)

(A)$(-\infty, -4)$.　　(B)$(4, +\infty)$.

(C)$\{-4, 4\}$.　　(D)$(-4, 4)$.

(3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a、b、c 依次为(　　)

(A)1, 0, 1.　　(B)1, 0, 2.　　(C)2, 1, 3.　　(D)2, 1, 4.

(4) 若 $\sum\limits_{n=1} nu_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

(C) $\sum (u_n + v_n)$ 收敛.　　(D) $\sum (u_n + v_n)$ 发散.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*) = ($　　$)$

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为(　　)

(A)$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B)$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C)$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D)$-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A)$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.　　(B)$P(AB) = P(A)P(B)$.

(C)$P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$.　　(D)$P(AB) = P(A\,B)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$(　　)

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.　　(D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n =$

(10) 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为

(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\,dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx =$　　　　.

(12) 以 P_A、P_B 分别表示 A、B 两个商品的价格，设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$，则当 $P_A = 10$，$P_B = 20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA} > 0) =$ ______.

(13) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $a =$ ______.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x, y) = xy - f(x+y, x-y)$. 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$；

(Ⅱ) 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x(x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(19)(本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x(n = 0, 1, 2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明数列$\{a_n\}$单调递减,且 $a_n = \dfrac{n - 1}{n + 2}a_{n-2}(n = 2, 3,\cdots)$;

(Ⅱ)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ $\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ $\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$与Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组Ⅰ与Ⅱ等价,求 a 的取值,并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似.

(Ⅰ) 求 x,y;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$, $P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 Z 的概率密度;

(Ⅱ) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(Ⅲ) X 与 Z 是否相互独立?

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 求 σ^2 的最大似然估计量.