

2022 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题

一、选择题：1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

- (1) 已知 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则 ()
- (A) $f(1) = 0$. (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- (C) $f'(1) = 1$. (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$.
- (2) 已知 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 且 $f(u)$ 可导, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y(\ln y - \ln x)$, 则 ()
- (A) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 0$.
- (B) $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$.
- (C) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 1$.
- (D) $f(1) = 0, f'(1) = 1$.
- (3) 设有数列 $\{x_n\}$, 其中 x_n 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则 ()
- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.
- (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.
- (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.
- (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.
- (4) 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则 ()
- (A) $I_1 < I_2 < I_3$.
- (B) $I_2 < I_1 < I_3$.
- (C) $I_1 < I_3 < I_2$.
- (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

(5) 下列4个条件中, 3阶矩阵 A 可以相似对角化的一个充分但不必要条件为()

- (A) A 有3个不相等的特征值.
- (B) A 有3个线性无关的特征向量.
- (C) A 有3个两两线性无关的特征向量.
- (D) A 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

(6) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 若方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则()

- (A) 方程组 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.
- (B) 方程组 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.
- (C) 方程组 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解.
- (D) 方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

(7) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 可取()

- (A) $\{0, 1\}$.
- (B) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$.
- (C) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.
- (D) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$.

(8) 设随机变量 $X \sim U(0, 3)$, 随机变量 Y 服从参数为2的泊松分布, 且 X 与 Y 协方差为 -1 ,

则 $D(2X - Y + 1) = ()$

- (A) 1. (B) 5. (C) 9. (D) 12.

(9) 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布, 且 X_1 的 4 阶矩存在. 设 $\mu_k = E(X_1^k), k=1, 2, 3, 4$, 则由切比雪夫不等式, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq (\quad)$$

(A) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$. (B) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

(C) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$. (D) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

(10) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 在 $X = x$ 条件下随机变量 $Y \sim N(x, 1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为 ()

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0, 1)$ 的最大方向导数为_____.

(12) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____.

(13) 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x^2 + y^2 \leq ke^{x+y}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

(14) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____.

(15) 已知矩阵 A 和 $E - A$ 可逆, 其中 E 为单位矩阵, 若矩阵 B 满足

$(E - (E - A)^{-1})B = A$, 则 $B - A =$ _____.

(16) 设 A, B, C 随机事件, 且 A 与 B 互不相容, A 与 C 互不相容, B 与 C 相互独立. 若

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(B \cup C | A \cup B \cup C) =$ _____

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 的满足 $y(1) = 3$ 的解, 求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

(19) (本题满分 12 分)

L 是曲面 $\Sigma: 4x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界, 曲面方向朝上, 已知曲线 L 的方向和曲面的方向符合右手法则, 求 $I = \oint_L (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz$

(20) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充要条件为对不同实数 a, b $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ij \cdot x_i x_j$.

- (1) 写出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;
- (2) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
- (3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(22) (本题满分 12 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本, 设 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta (\theta > 0)$ 为未知数, 利用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$.

2022 a ž 3. < !.J0-+U > œ5 669B

! œ (6) B NÎ

6 =F? NÎ Æ 1 10 ENÎ, " ENÎ 5 <, § 50 < ° A M" NÎ5 0, ° `F?N c , ? 6 `F?
N e1 \ > NÎ - \$? . " x, ° °

Ä Ä ". % Cã È I Ä Å

Ä \$ Å Ä % Å

Ä & Å Ä ' Å

İ 1, x Đ Ä % Å

İ @ À Đ

È Ä % Å ! " . ž È v F 5 W Z. È u Z. È ! 9 N ©

wKI

Ä Ä ". È D , È È I Ä Å

Ä \$ Å

Ä % Å

Ä & Å

Ä ' Å

İ 1, x Đ Ä % Å

İ @ À Đ

È F 9 Ä % Å

Ä Ä Å î 9 G È !] % Cã È I Ä Å

Ä \$ Å 9 ^ X È I ^ X

Ä %Å9 ^X È I ^X
 Ä &Å9 ^X È I ^X È v = 0 È ^X
 Ä ' Å9 ^X È I ^X È v = 0 È ^X
 Ī1,,xĐ Ä ' Å
 Ī@ ÀĐ È I Ä \$ÄÄ %ÄÄ &Ä wKI È D Ä ' Å, = 0 È ^X _
 !“.ž,´x Ä ' Å,´ ^X ,´İ Öf &È È6<
 X :...B3 È u ^X

Ä Å". È È È I Ä Å

Ä \$Å

Ä %Å

Ä &Å

Ä ' Å

Ī1,,xĐ Ä \$Å

Ī@ ÀĐ È È f &È

È p X :...B3FB ÿ È f & È p

È È x ø &È

È u ÈF9Ä \$Å

Ä Å ;G Z´&]È Lf. Le -(l)@ F,´0Z u6v = õ?±´&j

Ä \$Å 9 Z = -(1y,´(© ± l

Ä %Å 9 Z4i W £,´(© ± AGÿ

Ä &Å 9 Z T T4i W £,´(© ± AGÿ

Ä ' Å ,´ Ž ¾ = <(© ± l,´(© ± AGÿ-(Å!“ Ô

Ī1,,xĐ Ä \$Å

Ī@ ÀĐ

F9NÖ \$ ÅÖ 9 ï Z Â = (<© ± I UI)@ F Uv_ -(1)@ F U ,'(© ±
I 7-9Gý i È!“.ž V
F9NÖ % ÅÖ 9 ï Z 4i W £, '(© ± AGÿ_)@ F, 'u?± ' & V
F9NÖ & ÅÖ ï Z (© ± AGÿ T T 4i W £ U=7- Añ ð f 4i W £ Uu=7- Ø *)@ F V
F9NÖ ' ÅÖ Î)0 . Le = <(© ± I, '(© ± AGÿ! " Ô U)@ F, . Le = 0 Ê _ Î)0 . Le X

Aî w j Lf. Le Ê9 é0;4ô > <@ È I

Ä \$ Å é0;4ô 9M&@

Ä % Å é0;4ô 9M&@

Ä & Å é0;4ô > <@

Ä ' Å é0;4ô > <@

Ï1,,xĐ &
Ï@ À Đ

+a j Lf Î. Le U > <@ UI U£ >| AGÿ4ô

1y' X

+a U

I > <@ U > <@ U

U w j 5\$ AGÿU

I U X

+a <@ U FJ@ Uu > <

@ XuF9 ~ • X

Aî AGÿ4ô

9 AGÿ4ô

>

1y' l

Ä \$ Å

Ä % Å

Ä & Å

Ä ' Å

İ1,,xĐ &
İ@ ÅĐ

Aà U U

+a U

f & U U£ UI > wj

, ' * Uu1y' V

f & U Uu > =1y' V

f & U Uu > =1y' V

f & U Uu U 1y' VuF9 ~ • X

AîLç j Gÿ ÈLç j Gÿ =p ò j , "ú® 63 ÈD > • é j

È l Ä Å

Ä \$ Å Ä % Å Ä & Å Ä ' Å

İ1,,xĐ Ä & Å

İ@ ÅĐ

+a È x

È

p

ÈF9 Ä & Å

Ä ÄÄLj j Gy) 0ü < 6 3 D , ' Lf. ^X Äf

l+a 7" M [=1y ?) ¾ + ? , ' 9

Ä \$Ä Ä %Ä

Ä &Ä Ä ' Ä

Ï1,, x Ð Ä \$Ä

Ï@ Ä Ð Äà È n' Ç × l ×

ø

p ÈF9 Ä \$Ä

ÄÄLj j Gy ÈX ' & ;Lj j Gy È > , '-(£3+

jÄ Ä

Ä \$Ä Ä %Ä

Ä &Ä Ä ' Ä

Ï1,, x Ð Ä ' Ä

Ï@ Ä Ð +aNÈ ?

D

p

ø

ø j

u

x

p

ÈF9Ä Å X

Â = ;0°NÎ Æ 11 16 ENÎ, " ENÎ 5 <, § 30 <°

- X&é , '0W é A, j BBBBBBB

Ī1,,xĐ

Ī@ ÀĐ X 0&é 4, '0W é A, _!ß Ö, 'Q È

È p 0W, 'é A,

BBBBBB

Ī1,,xĐ

Ī@ ÀĐ

f & ,@0û I ,´ I93 \$ _ B B B B B B B

İ1,,xĐ

İ@ ÀĐ İ=1y ? £

f & -\$ Ö"rP«&é

@ Ç D

f &

F

D

f & <*6@ Ç

" E³ Ç ,´ 0W I j

¾_

". 4x ,´ f < j I B B B B B B B

İ1,,xĐ

İ@ ÀĐ È ,

¾_ ,´ f < j L \$ j

FÓ x @ Ç ¾_

". . Le ¼ F6 i] j ... }. Le 9 . Le % Cã

I

İ1,,xĐ

İ@ ÀĐ+a

Aî Lç j » & È D > Â =-(é È > Â =-(é È > -(Â) 0û 9

I

İ1,,xĐ

İ @ ÀĐ j > -(Â) 0û È 9

A X

ø > Â =-(é È > Â =-(é 9

X

X

? =@ 1ŠNÍ Æ7 22 ENÍ, § 70 < °@ 1Š È Ĩ 0 ½ •B* D =A÷ DEY0A L%J1Í!>PÚ °
 \NÈ% 6 6

Aî - _ Þ 6 é0; , '% Cã , '@ È"r "4i ,'

\$@F 4i

İ1,,xĐ ì\$@F 4i

İ@ ÀĐ

6 • Ç È £

+a - @ À ? . È "4i"Ñ 9 ²-\$\$@F 4i x

ø+a ¾

È

"4i"Ñ 9"d £\$@F 4i x

ø

È

È

u "4i 9 Ì\$@F 4i

\NÈ% 6 6

". £M' j

ÈAÑ1Ç

Ï1,,xĐ

Ï@ ÀĐ 60 6j

6 jTG 6

È !]Ö

È

È

u

!]Ö

È

u Ö

\NÈ% 6 6

_ "M' Ö

È

, 'Éé+| È "M' é A M : È". "4i

, 'é

A ¼ "M', 'é A1V 8 # {# I È"r

Ï1,,xĐ

Ï@ ÀĐ+a ß ^ { ß œ ? Ç Ö

Ö

È 7 A EαCO A È

Ö È 7 A EαCO A È

Ö È 7 A EαCO A È

I

\NÈ% 6 6
Aî X 9 ¼LfF 5 , ÈAñ > Ö , ' u?± ' & j) = < Î

Ï Añ > Ð È û ¾ >

{L\$ È

õ?± W Ö9 È I È 9

u 6 W Ö9 ^ X ^ Ç È j 9 ¼LfF 5 , È u ^ X ^ Ç

X μ , ? ¾M& ÈAà

!" &

È. -. ½ u

5, : È u 6 W õ?± W w ÇAñ

\NÈ% 6 6

". ¼!Q »

Ä Å É *) Ä, ' . Le x

