2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$,则当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是(　　)

(A) 比 x 高阶的无穷小量.　　(B) 比 x 低阶的无穷小量.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小量.　　(D) 与 x 等价的无穷小量.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right] = $(　　)

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) -2.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,则(　　)

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　(B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导.　　(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant e. \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛,则(　　)

(A) $\alpha < -2$.　　(B) $\alpha > 2$.　　(C) $-2 < \alpha < 0$.　　(D) $0 < \alpha < 2$.

(5) 设 $z = \frac{y}{x} f(xy)$,其中函数 f 可微,则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = $(　　)

(A) $2yf'(xy)$.　　(B) $-2yf'(xy)$.　　(C) $\frac{2}{x}f(xy)$.　　(D) $-\frac{2}{x}f(xy)$.

(6) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分. 记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\,dx\,dy\ (k = 1, 2, 3, 4)$,则(　　)

(A) $I_1 > 0$.　　(B) $I_2 > 0$.　　(C) $I_3 > 0$.　　(D) $I_4 > 0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　)

(A) $a = 0, b = 2$.　　(B) $a = 0$, b 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.　　(D) $a = 2$, b 为任意常数.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ______.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ ______.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是______.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^{2}}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为______.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$,$y_2=e^{x}-xe^{2x}$,$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解,则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$,$y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ ______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^{n} 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$,$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_{D}x^{2}\,dx\,dy$.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1) = 1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi \in (0, 1)$,使得 $f'(\xi) = 1$;

(Ⅱ)存在 $\eta \in (-1, 1)$,使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$,

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求此极限.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$,

(Ⅰ)求 L 的弧长;

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x=1$,$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2013 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)A.　(3)C.　(4)D.　(5)A.　(6)B.　(7)B.　(8)B.

二、填空题

(9)$\sqrt{\mathrm{e}}$.　(10)$\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$.　(11)$\dfrac{\pi}{12}$.　(12)$x+y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.　(13)$\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$.　(14)$-1$.

三、解答题

(15)$n=2$，$a=7$.

(16)$a=7\sqrt{7}$.

(17)$\dfrac{416}{3}$.

(18)证明略.

(19)最长距离$\sqrt{2}$,最短距离 1.

(20)(Ⅰ)1.

(Ⅱ)证明略. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

(21)(Ⅰ) $\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$.

(Ⅱ)$\dfrac{3(\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}$.

(22)$a=-1$，$b=0$ 时，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}$,其中 k_1，k_2 为任意常数.

(23)证明略.