二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ______.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ ______.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是______.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^{2}}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为______.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^{x}-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解,则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ ______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^{n} 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴,y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_{D}x^{2}\,dx\,dy$.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$,

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$,

(Ⅰ)求 L 的弧长;

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x=1$,$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2013年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) A.　(3) C.　(4) D.　(5) A.　(6) B.　(7) B.　(8) B.

二、填空题

(9) $\sqrt{e}$.　(10) $\sqrt{\dfrac{e}{e-1}}$.　(11) $\dfrac{\pi}{12}$.　(12) $x+y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.　(13) $e^{3x}-e^{x}-xe^{2x}$.　(14) -1.

三、解答题

(15) $n=2$，$a=7$.

(16) $a=7\sqrt{7}$.

(17) $\dfrac{416}{3}$.

(18) 证明略.

(19) 最长距离$\sqrt{2}$，最短距离 1.

(20) (Ⅰ) 1.

(Ⅱ) 证明略. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

(21) (Ⅰ) $\dfrac{1}{4}(e^2+1)$.

(Ⅱ) $\dfrac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)}$.

(22) $a=-1$，$b=0$ 时，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}$，其中 k_1，k_2 为任意常数.

(23) 证明略.