



2020 年数一真题

考途

一、选择题

- (1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中阶最高的是 ()
- (A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt$. (B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})dt$. (C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$. (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 ()
- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
- (B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
- (C) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.
- (D) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$.
- (3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0$, $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$, 非零向量 α 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 则 ()
- (A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.
- (B) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.
- (C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.
- (D) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.
- (4) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ()
- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$.
- (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| \leq R$.
- (C) 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.
- (D) 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.
- (5) 若矩阵 A 经过初等列变换化成 B , 则 ()
- (A) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$.
- (B) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$.
- (C) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$.
- (D) 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.
- (6) 已知直线 $l_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, 则 ()
- (A) α_1 可由 α_2, α_3 线性表示.
- (B) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示.
- (C) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.
- (7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()



(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{5}{12}$.

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为 ()

(A) $1 - \Phi(1)$.

(B) $\Phi(1)$.

(C) $1 - \Phi(0.2)$.

(D) $\Phi(0.2)$.

二、填空题

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, $f(0) = m$, $f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 X 服从 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

(15) 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

(16) 计算 $I = \oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

(17) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = (n + \frac{1}{2})a_n$. 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

(18) 设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy.$$

(19) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

(20) 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 的值.

(II) 求正交矩阵 Q .

(21) 设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵.

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

(22) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\} = P\{X_3=1\} = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.



(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且均大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s + t | T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.



2020年考研数学一真题解析

一、选择题

(1) 【答案】 D

【解析】 (方法一) 利用结论: 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim g(x)$, 则 $\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$.

$$(A) \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3.$$

$$(B) \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}.$$

$$(C) \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3.$$

$$(D) \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5.$$

故应选(D).

(方法二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小, 则 $\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

$$(A) \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt, m=2, n=1, \text{ 则 } n(m+1)=3.$$

$$(B) \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt, m=\frac{3}{2}, n=1, \text{ 则 } n(m+1)=\frac{5}{2}.$$

$$(C) \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, m=2, n=1, \text{ 则 } n(m+1)=3.$$

$$(D) \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt, m=\frac{3}{2}, n=2, \text{ 则 } n(m+1)=5.$$

故应选(D).

(2) 【答案】 C

【解析】 (方法一) 直接法

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}} = f'(0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

故应选(C).

(方法二) 排除法

取 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{|x|}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 则排除选项(A), (B).

若取 $f(x) = x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq 0$$

排除(D),故应选(C).

(3) 【答案】 A

【解析】 利用函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的充要条件 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - f'_x \Delta x - f'_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$.

因为 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\text{而 } n \cdot (x, y, f(x, y)) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y - f(x, y).$$

$$\text{有 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{n \cdot (x, y, f(x, y))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ 即 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|n \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

正确答案选(A).

(4) 【答案】 A

【解析】 由阿贝尔定理, 当 $|r| < R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 进而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

所以, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$. 答案选(A).

【评注】 解析中用到了原命题成立时, 它的逆否命题一定成立.

(5) 【答案】 B

【解析】 矩阵 A 经初等列变换得到 B , 故存在初等矩阵 $P_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 使

$$AP_1 P_2 \cdots P_l = B$$

因 P_i 均可逆, 故有 $A = BP_1^{-1} \cdots P_l^{-1} P_1^{-1}$, 记 $P = P_1^{-1} \cdots P_l^{-1} P_1^{-1}$ 故应选(B).

(6) 【答案】 C

【解析】 由直线标准方程知 L_1, L_2 的方向向量分别是 $\alpha_1 = (a_1, b_1, c_1)^T, \alpha_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$, 直线 L_1, L_2 分别经过 $A(a_2, b_2, c_2), B(a_3, b_3, c_3)$ 两点. 于是 L_1, L_2 交于一点 $\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{AB}| = 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \text{ 不平行} \end{cases}$, 即有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关且 α_1, α_2 线性无关.

从而 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表示.

(7) 【答案】 D

【解析】 A, B, C 中恰有一个事件发生即 $(A \cup B \cup C) - (AB \cup BC \cup AC)$. 因为 $P(AB) = 0$, 故 $P(ABC) = 0$. 所以恰有一个事件发生可以只考虑 $(A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)$ 的概率

$$P((A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AC) - P(BC) - P(AC)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

答案选(D).

(8) 【答案】 B

【解析】
$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{4}, X_i \text{ 独立同分布, 方差存在, 根据中心极限定理}$$



$\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(100 \times \frac{1}{2}, 100 \times \frac{1}{4}\right)$, 即 $N(50, 25)$.

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \leq \frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right\} = \Phi\left(\frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(1)$$

答案选(B).

二、填空题

(9) 【答案】 -1

【解析】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1)\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - e^x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - e^x}{2} = -1 \end{aligned}$$

(10) 【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1}{t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(-\frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = -\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}, \end{aligned}$$

则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}.$

(11) 【答案】 $n + am$

【解析】
$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -f'(x) \Big|_0^{+\infty} - af(x) \Big|_0^{+\infty}$$

只需求出 $f'(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 即可.

微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

当 $a > 2$ 时, λ_1, λ_2 为两负实根, $f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$,

当 $a = 2$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$,

当 $0 < a < 2$ 时, $\lambda_{1,2} = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x\right) e^{-\frac{a}{2}x}$.

不论如上哪种情形, 均有 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $f'(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 因而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -f'(x) \Big|_0^{+\infty} - af(x) \Big|_0^{+\infty} \\ &= f'(0) + af(0) = n + am. \end{aligned}$$

(12) 【答案】 $4e$

【解析】 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导, 利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x e^{x(y)^2}$$



$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x^3 y^2} + x e^{x^3 y^2} \cdot 3x^2 y^2$$

$$\text{所求 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(1,1)} = 4e.$$

$$(13) \text{【答案】 } a^2(a^2 - 4)$$

【解析】 由行列式性质恒等变形,例如把2行加到1行,3行加到4行,再把1列的-1倍加到2列,4列的-1倍加到3列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \\ = a^2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 4)$$

【评注】 基本计算题,解法非常多,也可每列都加到第1列,再消0,...

$$(14) \text{【答案】 } \frac{2}{\pi}$$

【解析】 $X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), Y = \sin X, EX = 0.$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - EX \cdot EY = E(XY) = E(X \sin X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi} (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

三、解答题

$$(15) \text{【解】 由 } \begin{cases} f'_x = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y = 24y^2 - x = 0 \end{cases} \text{ 得驻点为 } (0, 0), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right).$$

$$\text{可计算 } A = f''_{xx} = 6x, B = f''_{xy} = -1, C = f''_{yy} = 48y$$

$$\text{判别式 } \Delta = AC - B^2 = 288xy - 1.$$

在(0,0)点处, $\Delta = -1 < 0$, 不是极值点;

在 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 点处, $\Delta = 3 > 0$ 且 $A = 1 > 0$, 取极小值为 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}.$

(16)【分析】 挖去奇点(0,0), 用格林公式

【解】 取 $L_1: 4x^2 + y^2 = \epsilon^2$ (ϵ^2 足够小), 方向为顺时针方向,

$$\text{则 } I = \oint_{L+L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy - \oint_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$$

$$\text{令 } P = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q = \frac{x+y}{4x^2+y^2},$$

$$\text{计算得 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4x^2 - 8xy + y^2}{(4x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{因而 } I = 0 - \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{L_1} (4x-y) dx + (x+y) dy = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{D_1} 2 dx dy$$

$$\text{其中 } D_1 = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq \epsilon^2\}.$$

$$\text{所以 } I = \frac{2}{\epsilon^2} \times \pi \times \epsilon \times \frac{\epsilon}{2} = \pi.$$

(17)【分析】 得到和函数的微分方程, 解微分方程求出和函数.

$$\text{【解】 由阿达玛公式 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n + 1} = 1.$$



幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 所以, 当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{即 } S'(x) = x S'(x) + \frac{1}{2} S(x) + 1, \frac{S'(x)}{S(x)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

$$\ln |S(x)+2| = -\frac{1}{2} \ln |1-x| + \ln C_1$$

$$|S(x)+2| = \frac{C_1}{\sqrt{1-x}}, S(x)+2 = \frac{\pm C_1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{亦是 } S(x)+2 = \frac{C}{\sqrt{1-x}},$$

$$\text{由 } S(0)=0 \text{ 得 } C=2, \text{ 所求和函数为 } S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.$$

(18) 【分析】 利用投影轮换法.

$$\text{【解】 曲面 } \Sigma: z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ 的法向量 } \boldsymbol{n} = \{z'_x, z'_y, -1\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{-z'_x, -z'_y, 1\} dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left[-\frac{x(xf(xy)+2x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(yf(xy)+2y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + zf(xy)+z \right] dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} [-\sqrt{x^2+y^2} f(xy) - 2\sqrt{x^2+y^2} + zf(xy)+z] dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad (D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \cdot r dr = \frac{14}{3} \pi \end{aligned}$$

【评注】 本题只给出 $f(x)$ 连续, 因而不能采取补曲面高斯公式计算.

(19) 【证明】 (I) 设 $|f(c)| = M$.

若 $c \in (0, 1]$, 由拉格朗日定理知存在 $\xi \in (0, c)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(c)}{c}$$

$$\text{从而有 } |f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{c} = \frac{M}{c} \geq M.$$

若 $c \in (1, 2]$, 同理存在 $\xi \in (1, 2)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(c)}{2-c} = \frac{-f(c)}{2-c}$$

$$\text{从而有 } |f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{2-c} = \frac{M}{2-c} \geq M.$$

综上所述, 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) 若 $c \in [0, 1)$, 则



$$M = |f(c)| = |f(c) - f(0)| = |f'(\xi)| \cdot c \leq Mc$$

由于 $0 \leq c < 1$, 则 $M = 0$.

同理, 当 $c \in (1, 2]$ 时, 也可得 $M = 0$.

若 $c = 1$, 且 $M > 0$

$$M = |f(1)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx < M$$

矛盾, 则 $M = 0$. 原题得证.

(20)【解】 (I) 二次型 f 经正交变换 $x = Qy$ 化为二次型 g . 记二次型 f, g 的矩阵分别是 A 和 B . 即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

因 $A \sim B$, 于是 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, $|A| = |B|$, 即 $\begin{cases} a+b=5, \\ ab=4. \end{cases}$

又因 $a \geq b$, 故 $a = 4, b = 1$.

(II) 对二次型 $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 和 $g = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2$,

只要令 $\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = -y_1, \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵合于所求.

【评注】 如求出 A 的特征向量并单位化构造正交矩阵 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

经 $x = Q_1z$ 得 $x^T Ax = 5z_1^2$.

类似构造正交矩阵 Q_2 使 $y^T By = 5z_1^2$, 即 $x = Q_1z, y = Q_2z$ 有 $z = Q_2^{-1}y$,

从而 $x = Q_1Q_2^{-1}y$ 而得 $Q = Q_1Q_2^{-1}$ 亦可.

(21)【解】 (I) 因 $\alpha \neq 0$ 且 α 不是 A 的特征向量. 于是 $A\alpha \neq k\alpha$, 从而 α 与 $A\alpha$ 不共线, 即 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 故 $P = (\alpha, A\alpha)$ 可逆.

或(反证法) 若 P 不可逆, 有

$$|P| = |\alpha, A\alpha| = 0$$

α 与 $A\alpha$ 成比例, 于是 $A\alpha = k\alpha$. 又 $\alpha \neq 0$ 知 α 是 A 的特征向量与已知条件矛盾.

(II)(方法一) 由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ 有 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) \\ &= (\alpha, A\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 P 可逆, 于是

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 而 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$ 特征值 $2, -3$.

于是 A 有 2 个不同特征值从而 A 可相似对角化.

(方法二) 因 $A^2 + A - 6E = (A - 2E)(A + 3E) = (A + 3E)(A - 2E)$,

由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 即 $(A^2 + A - 6E)\alpha = 0$,

于是 $(A - 2E)(A + 3E)\alpha = 0$,

即 $(A - 2E)(A\alpha + 3\alpha) = 0$,

即 $A(A\alpha + 3\alpha) = 2(A\alpha + 3\alpha)$,



由 α 不是特征向量, 有 $A\alpha + 3\alpha \neq 0$

从而 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 类似有 $\lambda = -3$ 是特征值. 下略.

(22)【解】(I) (X_1, Y) 的分布函数 $F(x, y)$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X_1 \leq x, Y \leq y\} = P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y\} \\ &= P\{X_3 = 0\} P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \\ &\quad P\{X_3 = 1\} P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq \min(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

(II) Y 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y\} \\ &= P\{X_3 = 0\} P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \\ &\quad P\{X_3 = 1\} P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq y\} = \frac{1}{2} \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(y) = \Phi(y) \end{aligned}$$

$Y \sim N(0, 1)$.

$$(23)【解】 F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} f(x) = F'(x) = \begin{cases} m \left(\frac{t}{\theta}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$(I) P\{T > t\} = \int_t^{+\infty} f(t) dt = F(t) \Big|_t^{+\infty} = F(+\infty) - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t > 0.$$

$$\begin{aligned} P\{T > s+t \mid T > s\} &= \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} \\ &= e^{-(\frac{t+s}{\theta})^m + (\frac{s}{\theta})^m} \end{aligned}$$

(II) 给定 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \prod_{i=1}^n m \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{m-1} \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m} = m^n \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln m + \sum_{i=1}^n (m-1) \ln t_i - mn \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^m}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -mn \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{(-m) t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0, \quad -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0,$$

解得 $\theta^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m$, 不难验证为最大值.

$$\text{最大似然估计值 } \hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}.$$

