二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ______.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ______.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ______.

(13) 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=3$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$,记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若当 $x\to0$ 时,$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量,求常数 k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 12 分)

过点 $(0,1)$ 作曲线 L:$y=\ln x$ 的切线,切点为 A,又 L 与 x 轴交于 B 点,区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$,其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

（21）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$（$n$ 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（Ⅱ）记（Ⅰ）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

（22）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

（Ⅰ）计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

（23）（本题满分 11 分）

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

2012 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)A.　(3)B.　(4)D.　(5)D.　(6)D.　(7)C.　(8)B.

二、填空题

(9)1.　(10) $\frac{\pi}{4}$.　(11)0.　(12)$\sqrt{x}$.　(13)$(-1,0)$.　(14)-27.

三、解答题

(15)(Ⅰ)$a=1$.

(Ⅱ)$k=1$.

(16)极大值$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$,极小值$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

(17)D 的面积为 2,旋转体的体积为$\frac{2\pi}{3}(e^2-1)$.

(18)$\frac{16}{15}$.

(19)(Ⅰ)$f(x)=e^x$.

(Ⅱ)$(0,0)$.

(20)证明略.

(21)证明略.

(22)(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=1-a^4$.

(Ⅱ)$a=-1$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,其通解为 $k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(23)(Ⅰ) $a=-1$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 变成标准形 $f=6y_1^2+2y_2^2$.