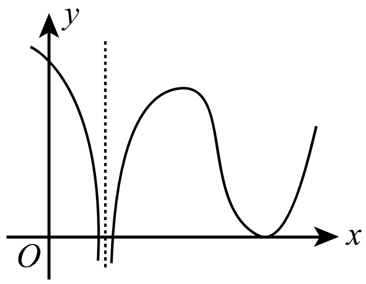
2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则(　　)



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(2) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$,则(　　)

(A) $f'_x-f'_y=0$.　　(B) $f'_x+f'_y=0$.　　(C) $f'_x-f'_y=f$.　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

(3) 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\,(i=1,2,3)$,其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},\quad D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$

则(　　)

(A) $J_1<J_2<J_3$.　　(B) $J_3<J_1<J_2$.　　(C) $J_2<J_3<J_1$.　　(D) $J_2<J_1<J_3$.

(4) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$($k$ 为常数)(　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.　　(C) 发散.　　(D) 收敛性与 k 有关.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2,则(　　)

(A) $a>1$.　　(B) $a<-2$.　　(C) $-2<a<1$.　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$.

(7) 设 A,B 为两个随机事件,且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,如果 $P(A\mid B)=1$,则(　　)

(A) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$.　　(B) $P(A\mid\overline{B})=0$.　　(C) $P(A\cup B)=1$.　　(D) $P(B\mid A)=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(1,4)$,则 $D(XY)=$(　　)

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 14.　　(D) 15.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

(10) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$______.

(11) 设函数$f(u,v)$可微,$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定,则$dz|_{(0,1)}=$______.

(12) 设$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$______.

(13) 行列式$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

(14) 设袋中有红、白、黑球各1个,从中有放回地取球,每次取1个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰好为4的概率为______.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分10分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16) (本题满分10分)

设某商品的最大需求量为1 200件,该商品的需求函数$Q=Q(p)$,需求弹性$\eta=\frac{p}{120-p}$ $(\eta>0)$,p为单价(万元).

(Ⅰ) 求需求函数的表达式;

(Ⅱ) 求$p=100$万元时的边际收益,并说明其经济意义.

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\,\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，求 $f(x)$.

(19)（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$.记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度；

（Ⅱ）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

（Ⅰ）求 T 的概率密度；

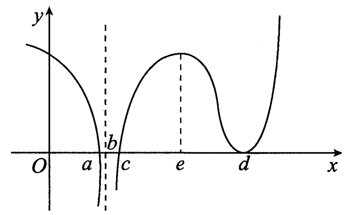
（Ⅱ）确定 a，使得 $E(aT)=\theta$.

2016年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) B



解　由导数 $f'(x)$ 的图形(见右图)可知 $f(x)$ 的驻点为 $x=a$，$x=c$，$x=d$.不可导点为 $x=b$.在 $x=a$，$x=c$ 点的左右两侧，导数 $f'(x)$ 的符号相反，则 $x=a$，$x=c$ 为函数 $y=f(x)$ 的极值点.而在 $x=b$，$x=d$ 点的两侧，导数 $f'(x)$ 的符号相同，则 $x=b$，$x=d$ 不是极值点，因此，$f(x)$ 有 2 个极值点.

在 $x=b$ 点的左侧，$f'(x)$ 递减，则 $f''(x)<0$，而在 $x=b$ 的右侧，$f'(x)$ 递增，从而 $f''(x)>0$，故 $(b,f(b))$ 为曲线的拐点.

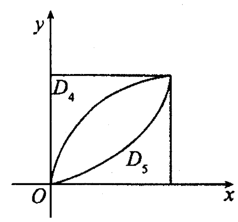
类似地，在 $x=e$，$x=d$ 点的左、右两侧，$f'(x)$ 的单调性发生改变，则 $f''(x)$ 的符号发生改变，因此，$(e,f(e))$，$(d,f(d))$ 为曲线的拐点，所以曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点，故应选 B.

(2) D

解　$f'_x=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$，$f'_y=\dfrac{0-e^x(-1)}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，

所以 $f'_x+f'_y=\dfrac{e^x(x-y)}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{x-y}=f$.　故应选 D.

(3) B



解　如右图所示，记 $D_4=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_5=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，

则 $D_2=D_1-D_4$，$D_3=D_1-D_5$.

由于 D_1 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$J_1=\iint_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint_{D_1}\sqrt[3]{y-x}\,dx\,dy=-J_1\text{，从而 } J_1=0.$$

而在 D_4 上函数 $\sqrt[3]{x-y}<0$，从而

$$J_2=\iint_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy-\iint_{D_4}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy>0,$$

在 D_5 上函数 $\sqrt[3]{x-y}>0$，从而

$$J_3=\iint_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy-\iint_{D_5}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy<0,$$

因此有 $J_3<J_1<J_2$，故应选 B.

(4) A

解　由于 $\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，

对于正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$，其前 n 项和

$$S_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛.

由正项级数的比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛.故应选 A.

(5) C

解 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，有 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，即有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，即 A 正确；$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，即 B 正确，而 D 正确. 故应选 C.

(6) C

解 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$，得特征值为 $a+2,a-1$(二重).

由条件，$a+2>0,a-1<0$.故应选 C.

(7) A

解 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1$，则 $P(B)=P(AB)$，

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$，所以

$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$ 故应选 A.

(8) C

解
$$\begin{aligned}D(XY)&=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2\\&=E(X^2)E(Y^2)-(EX\cdot EY)^2(\text{由 }X\text{ 与 }Y\text{ 独立})\\&=[DX+(EX)^2][DY+(EY)^2]-1=14.\end{aligned}$$
故应选 C.

二、填空题

(9) 6

解 由于当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin2x$，$\sin2x\sim2x$，$\mathrm{e}^{3x}-1\sim3x$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{3}=2$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

(10) $\sin1-\cos1$

解 由定积分的定义知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1x\,\mathrm{d}\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-\cos1+\sin x\Big|_0^1\\&=\sin1-\cos1.\end{aligned}$$

(11) $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

解 等式 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导，

得 $z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1(x-z,y)\cdot(1-z'_x)$；

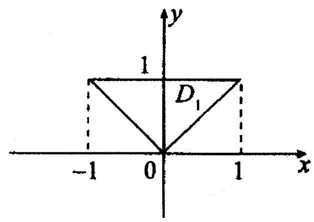
$(x+1)z'_y-2y=x^2[f'_1(x-z,y)\cdot(-z'_y)+f'_2(x-z,y)]$.

再将 $x=0,y=1$ 代入原式，可得 $z=1$.

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入上述两式，得 $z'_x=-1,z'_y=2$.

故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

(12) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3\mathrm{e}}$



解 积分区域 D 如右图所示，D 关于 y 轴对称，记

$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$，

由对称性知

$$\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal[\text{令 } y^2=t]{}\frac{1}{3}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int_0^1 t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}$$

$$=-\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathrm{e}}.$$

(13) $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

解 按最后一行展开，得

$$(-1)^{4+1}\times 4\begin{vmatrix}-1&0&0\\ \lambda&-1&0\\ 0&\lambda&-1\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\times 3\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&\lambda&-1\end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{4+3}\times 2\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\ 0&\lambda&0\\ 0&0&-1\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\ 0&\lambda&-1\\ 0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

(14) $\dfrac{2}{9}$

解 取球次数恰好为 4 次，说明第 4 次有一种颜色，前 3 次有两种颜色.

由古典概率公式，得 $P=\dfrac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot 2}{3^4}=\dfrac{2}{9}$.

三、解答题

(15) **解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$

且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}$$

$$=\frac{1}{3},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

(16) **解** (Ⅰ) 由题设 $-\dfrac{p}{Q}\cdot\dfrac{dQ}{dp}=\dfrac{p}{120-p}$.

所以 $\int\dfrac{dQ}{Q}=-\int\dfrac{1}{120-p}dp$，可得 $\ln Q=\ln(120-p)+\ln C$，即 $Q=C(120-p)$.

又最大需求量为 1200，故 $C=10$，所以需求函数 $Q=1200-10p$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，收益函数 $R=120Q-\dfrac{1}{10}Q^2$，边际收益 $R'(Q)=120-\dfrac{1}{5}Q$.

当 $p=100$ 时，$Q=200$，故当 $p=100$ 万元时的边际收益 $R'(200)=80$，其经济意义为：销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

(17) **解** 当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=\int_0^x|t^2-x^2|dt+\int_x^1|t^2-x^2|dt=\int_0^x(x^2-t^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3};$$

当 $x>1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2-\dfrac{1}{3}$，

所以 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x>1,\end{cases}$$

而 $$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,\quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2,$$

故 $$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1,\end{cases}$$

由 $f'(x)=0$ 求得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}$，又 $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，从而 $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

(18) **解** 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du$.

由题设 $\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$，

求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$，且 $f(0)=-1$.

因此 $f'(x)-f(x)=e^{-x}$，

从而 $$\begin{aligned}f(x)&=e^{\int dx}\left(C+\int e^{-x}e^{-\int dx}dx\right)\\&=Ce^x-\frac{e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

由 $f(0)=-1$，得 $C=-\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

(19) **解** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{2n+4}}{(n+2)(2n+3)}}{\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}\right|=x^2$，所以当 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，

幂级数发散.

又当 $x=\pm 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛,所以幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}, x\in[-1,1]$,则

$f'(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, f''(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}, x\in(-1,1)$.

因为 $f'(0)=0, f(0)=0$,所以当 $x\in(-1,1)$ 时,

$f'(x)\int_0^x f''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\ln(1+x)-\ln(1-x)$,

$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^x \ln(1-t)\mathrm{d}t=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$.

又 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2\ln 2, f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=2\ln 2$,

所以 $f(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1),\\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$

(20)**解** (Ⅰ)对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})$ 施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & -1 & 2a-1 & 1\\ 0 & 0 & -a^2+2a & a-2\end{array}\right),$$

由方程组无解知,秩 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})>$ 秩 $\boldsymbol{A}$,即 $-a^2+2a=0$,且 $a-2\neq 0$,解得 $a=0$.

(Ⅱ)对矩阵 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})$ 施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

所以,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(21)**解** (Ⅰ)因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=-2$ 时,解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=0$ 时,解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\xi_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $A^{99}=P\begin{pmatrix}(-1)^{99} & 0 & 0\\ 0 & (-2)^{99} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99} & 0 & 0\\ 0 & (-2)^{99} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$,所以

$$\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{97}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{A}^2=\cdots=\boldsymbol{BA}^{99},$$

即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2,\end{cases}$$

(22)**解** (Ⅰ)(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3,(x,y)\in D,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

(Ⅱ)对于 $0<t<1$,

$$\begin{aligned}P\{U\leqslant 0,X\leqslant t\}&=P\{X>Y,X\leqslant t\}\\&=\int_0^t \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}t^2-t^3,\end{aligned}$$

$$P\{U\leqslant 0\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X\leqslant t\}=\int_0^t \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3.$$

由于 $P\{U\leqslant 0,X\leqslant t\}\neq P\{U\leqslant 0\}P\{X\leqslant t\}$,所以 U 与 X 不相互独立.

(Ⅲ)当 $z<0$ 时,$F(z)=0$;当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$\begin{aligned}F(z)&=P\{Z\leqslant z\}\\&=P\{U+X\leqslant z\}\\&=P\{U=0,X\leqslant z\}\\&=P\{X>Y,X\leqslant z\}\\&=\frac{3}{2}z^2-z^3;\end{aligned}$$

当 $1\leqslant z<2$ 时,$F(z)=P\{U+X\leqslant z\}$

$$=P\{U=0,X\leqslant z\}+P\{U=1,X\leqslant z-1\}$$
$$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^{2};$$

当 $z\geqslant 2$ 时,$F(z)=P\{U+X\leqslant z\}=1$.

所以
$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^{2}-z^{3}, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^{2}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

(23) **解** (Ⅰ)总体 X 的分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^{3}}{\theta^{3}}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

从而 T 的分布函数为
$$F_{T}(z)=[F(z)]^{3}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z^{9}}{\theta^{9}}, & 0\leqslant z<\theta,\\ 1, & z\geqslant\theta .\end{cases}$$

所以 T 的概率密度为
$$f_{T}(z)=\begin{cases}\frac{9z^{8}}{\theta^{9}}, & 0<z<\theta,\\ 0, & \text{其他} .\end{cases}$$

(Ⅱ) $E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_{T}(z)\mathrm{d}z$
$$=\int_{0}^{\theta}\frac{9z^{9}}{\theta^{9}}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{9}{10}\theta,$$

从而 $E(aT)=\frac{9}{10}a\theta$.

令 $E(aT)=\theta$,得 $a=\frac{10}{9}$.

所以当 $a=\frac{10}{9}$ 时,$E(aT)=\theta$.