2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设$\{x_n\}$是数列.下列命题中不正确的是(　　)

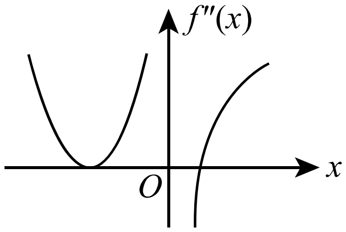
(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示,则曲线$y=f(x)$的拐点个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(3) 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数$f(x,y)$在$D$上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(4) 下列级数中发散的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega,\ d\notin\Omega$.　　(B) $a\notin\Omega,\ d\in\Omega$.

(C) $a\in\Omega,\ d\notin\Omega$.　　(D) $a\in\Omega,\ d\in\Omega$.

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为(　　)

考途
考路艰辛，征途有我

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则(　　)

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.

(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(D) $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$(　　)

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.

(D) $mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$______.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$.若 $\varphi(1)=1$, $\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$______.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$______.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)=$______.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a, b, k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

考途
考路艰辛，征途有我

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性($\eta > 0$).

(Ⅰ)证明定价模型为 $p = \dfrac{MC}{1 - \dfrac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1\,600 + Q^2$,需求函数为 $Q = 40 - p$,试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零.若对任意的 $x_0 \in I$,曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0) = 2$,求 $f(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x)$,$u_2(x)$,$\cdots$,$u_n(x)$ 可导,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

考途
考路艰辛,征途有我

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 a, b 的值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ) 求 Y 的概率分布;

(Ⅱ) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ) 求 θ 的最大似然估计量.

考途
考路艰辛,征途有我

2015年

数学(三)参考答案

一、选择题

(1) D

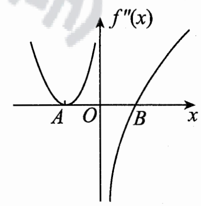
解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.对于 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$，亦有 $\exists K\in\mathbf{N}^+$，当 $k>K$ 时，$n_k>N$，$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ 恒成立，故由极限定义可知 $\lim\limits_{n_k\to\infty}x_{n_k}=a$.则可知选项 A,C 正确.

对于B，证明如下：由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，可得对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1,N_2\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$ 成立，当 $n>N_2$ 时，恒有 $|x_{2n+1}-a|<\varepsilon$ 成立.取 $N=2\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.故选项 B 正确.

选项 D 显然错误.可举反例： 取 $x_n=\begin{cases}a+\dfrac{1}{n}, & n=3m,\\ a+\dfrac{1}{n}, & n=3m-1,(m\geqslant 1).\\ n, & n=3m-2\end{cases}$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.故应选 D.

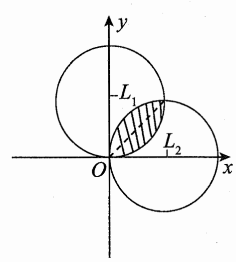
(2) C



解 如右图所示，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故拐点有可能出现在 $f''(x)$ 的零点及 $f''(x)$ 不存在的点处，即在图形中的 $x=A$，$x=0$，$x=B$ 处.因为 $x=A$ 左右两侧 $f''(x)>0$，故 $(A,f(A))$ 不是拐点；因为 $x=0$ 及 $x=B$ 左右两侧 $f''(x)$ 可导，所以 $(0,f(0))$ 及 $(B,f(B))$ 为拐点.

故 $y=f(x)$ 有两个拐点.

(3) B



解 积分区域 D 如右图所示.对于 L_1，其方程为 $x^2+y^2=2x$，化为极坐标为 $r=2\cos\theta$.对于 L_2，其方程为 $x^2+y^2=2y$，化为极坐标为 $r=2\sin\theta$.将积分化为极坐标下累积分可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

故 B 选项正确.

若将其化为直角坐标系下的累次积分.则有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

因为 $f(x,y)$ 并不满足轮换对称性.故 C,D 项错误.

(4) C

解 对于 A 选项：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{8^{n+1}}\cdot\dfrac{8^n}{n}=\dfrac{1}{8}<1$. 由比值审敛法可知，原级数收敛.

对于 B 选项：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

考路艰辛，征途有我 考途

又因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，由正项级数比较审敛法的极限形式可知，原级数收敛.

对于 C 选项：$\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}=\begin{cases}\dfrac{2}{\ln n}, & n=2m,\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$ $(m>0)$，故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2}{\ln 2n}>\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

由比较审敛法知，原级数发散.

对于 D 选项：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{[-(n+1)]\cdot\frac{-n}{n+1}}=\mathrm{e}^{-1}<1.$$

由比值审敛法知，原级数收敛. 故应选 C.

(5) D

解 $$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-2)(a-1)(2-1)=(a-2)(a-1).$$

由线性方程组有无穷多解，得$|\boldsymbol{A}|=0$，即$a=1$或$a=2$.

当$a=1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，知$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即$d=1$或$d=2$.

同理，当$a=2$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&0&0&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由题意，知$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，即$d=1$或$d=2$.

故应选 D.

(6) A

解 $$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

又因为 $$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

所以 $$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

故应选 A.

(7) C

解 对于 A,B 选项：当事件A与B独立时，$P(AB)=P(A)P(B)$.

而当A,B不独立时，$P(AB)$与$P(A)P(B)$没有确定的关系，所以 A,B 选项错误.

考途
考路艰辛，征途有我

对于C,D选项:由概率性质 $P(A)\geqslant P(AB)$,$P(B)\geqslant P(AB)$,

两式相加,得 $P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB)$,即 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

故应选C.

(8) B

解 因为 $X\sim B(m,\theta)$,所以 $D(X)=m\theta(1-\theta)$.

设 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则 $E(S^2)=D(X)=m\theta(1-\theta)$.

所以
$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$
$$=(n-1)E(S^2)=(n-1)D(X)=m(n-1)\theta(1-\theta).$$

故应选B.

二、填空题

(9) $-\dfrac{1}{2}$

解 利用等价无穷小代换.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

(10) 2

解 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,$\varphi'(x)=\left[x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t\right]'=x\cdot 2xf(x^2)+\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$.

故 $\varphi'(1)=2f(1)+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2f(1)+\varphi(1)$.

由题目中条件,知 $f(1)=\dfrac{\varphi'(1)-\varphi(1)}{2}=2$.

(11) $-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$

解 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 知,当 $x=0$,$y=0$ 时,$z=0$.

对方程两边分别关于 x 和 y 求偏导数,得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$
$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $x=0$,$y=0$,$z=0$ 代入两式,得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}$,$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$,则

$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

(12) $2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}$

解 因 $y(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值3,且 $y(x)$ 可导,则 $y(0)=3$,$y'(0)=0$.

特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,解得 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=-2$.

所以微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$,

代入 $y(0)=3$,$y'(0)=0$,解得 $C_1=2$,$C_2=1$.

考途
考路艰辛,征途有我

故 $y(x)=2e^x+e^{-2x}$.

(13) 21

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$ 及 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $3,7,1$，从而 $|\boldsymbol{B}|=3\times7\times1=21$.

(14) $\frac{1}{2}$

解 由于相关系数为0，所以，X,Y 都服从正态分布，即 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立.

由 $X\sim N(1,1)$，可得 $X-1\sim N(0,1)$，所以

$$\begin{aligned}P\{XY-Y<0\}&=P\{(X-1)Y<0\}\\&=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\}\\&=P\{X-1<0\}P\{Y>0\}+P\{X-1>0\}P\{Y<0\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题

(15) **解** 因为

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{a}{1+x}+b(\sin x+x\cos x)\right]=1+a,$$

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}3kx^2=0,$$

所以当 $1+a\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. 与题设矛盾.

故 $1+a=0$，即 $a=-1$.

又

$$\lim_{x\to0}f''(x)=\lim_{x\to0}\left[-\frac{a}{(1+x)^2}+b(2\cos x-x\sin x)\right]=-a+2b=1+2b,$$

$$\lim_{x\to0}g''(x)=\lim_{x\to0}6kx=0,$$

由题设，同理可知 $1+2b=0$，即 $b=-\frac{1}{2}$.

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2a}{(1+x)^3}-b(3\sin x+x\cos x)}{6k}=\frac{a}{3k}=-\frac{1}{3k},$$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，所以 $-\frac{1}{3k}=1$，即 $k=-\frac{1}{3}$.

(16) **解** 因为区域 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint\limits_D xy\,dx\,dy=0$，

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x(x+y)\,dx\,dy&=\iint\limits_D x^2\,dx\,dy\\&=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\,dy\\&=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\,dx\end{aligned}$$

考途
考路艰辛，征途有我

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$,则

$$\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8},$$

又 $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$,所以

$$\iint_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(17) **解** (Ⅰ) 由收益 $\boldsymbol{R}=p\boldsymbol{Q}$,得边际收益

$$\boldsymbol{MR}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}=p+\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}=p\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

欲使利润最大,应有 $\boldsymbol{MR}=\boldsymbol{MC}$,即 $p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)=\boldsymbol{MC}$,

所以定价模型为 $$p=\frac{\boldsymbol{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}.$$

(Ⅱ) 由题设知 $\boldsymbol{MC}=2\boldsymbol{Q}$,$\eta=-\frac{p}{\boldsymbol{Q}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{40-p}$.

由(Ⅰ)有 $p=\dfrac{2(40-p)}{1-\dfrac{40-p}{p}}$,解得 $p=30$.

所以此商品的价格为 $p=30$.

(18) **解** 曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

该切线与 x 轴的交点为$\left(x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$.

根据题设条件可知 $\dfrac{1}{2}\dfrac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4$,

即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\frac{1}{8}y^2$.

解得 $y=-\dfrac{8}{8C+x}$.

因为 $f(0)=2$,所以 $C=-\frac{1}{2}$.

故 $f(x)=\dfrac{8}{4-x}$, $x\in I$.

(19) **解** (Ⅰ) 因为函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,所以

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}=u'(x),\ \lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}=v'(x),\ \text{且}\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)=v(x).$$

从而

考途
考路艰辛,征途有我

$$[u(x)v(x)]' = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)v(x+\triangle x)-u(x)v(x)}{\triangle x}$$
$$= \lim_{\triangle x\to 0}\left[\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}v(x+\triangle x)+u(x)\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}\right]$$
$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x+\triangle x)-u(x)}{\triangle x}\cdot\lim_{\triangle x\to 0}v(x+\triangle x)+u(x)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{v(x+\triangle x)-v(x)}{\triangle x}$$
$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

(Ⅱ)

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).$$

(20) **解** (Ⅰ)由于 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3=0,$$

于是 $a=0$.

(Ⅱ)由于
$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},$$
所以
$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}.$$
由(Ⅰ)知

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 均可逆,所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(21) **解** (Ⅰ)由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$
于是
$$3+a=2+b,\ 2a-3=b,$$
解得
$$a=4,\ b=5.$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

考途
考路艰辛，征途有我

当 $\lambda_3=5$ 时，由方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵.

(22) **解** （Ⅰ）每次观测中,观测值大于 3 的概率为

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2,\ k=2,3,\cdots.$$

（Ⅱ）

$$\begin{aligned}EY&=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}\\&=16.\end{aligned}$$

(23) **解** （Ⅰ）由于总体 X 服从区间 $[\theta,1]$ 上的均匀分布，所以

$$EX=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

（Ⅱ）记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n),\\0, & \text{其他}\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\\0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

由此可知，当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\ .$$

考途
考路艰辛，征途有我