2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设$\{x_n\}$是数列.下列命题中不正确的是(　　)

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

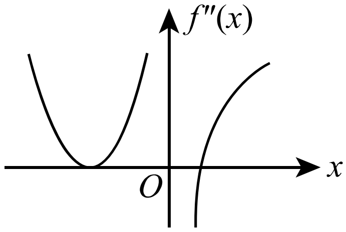
(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示,则曲线$y=f(x)$的拐点个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.



(3) 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数$f(x,y)$在$D$上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=$(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

(C) $2\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy$.

(D) $2\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(4) 下列级数中发散的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$.若集合$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega$, $d\notin\Omega$.　　(B) $a\notin\Omega$, $d\in\Omega$.

(C) $a\in\Omega$, $d\notin\Omega$.　　(D) $a\in\Omega$, $d\in\Omega$.

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为(　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则(　　)

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D) $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$(　　)

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　　(D) $mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$______.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t$.若 $\varphi(1)=1$, $\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$______.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$______.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)=$______.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a, b, k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,\ y\geqslant x^2\}$.

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型.设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性($\eta > 0$).

(Ⅰ)证明定价模型为 $p = \dfrac{MC}{1 - \dfrac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1\,600 + Q^2$,需求函数为 $Q = 40 - p$,试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零.若对任意的$x_0 \in I$,曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且$f(0) = 2$,求$f(x)$的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,利用导数定义证明$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x)$,$u_2(x)$,$\cdots$,$u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出$f(x)$的求导公式.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a, b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.